Übungen zur Vorlesung “Lineare Algebra II”
SS 2009 Blatt 3

Ausgabe: 07.05.2009, **Abgabe:** 14.05.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss09/la2.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Es werden nur *zwei* Aufgaben abgegeben und bewertet.

Aufgabe 3.1: Sei V ein euklidischer Vektorraum, und $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängige Vektoren. Zeigen Sie, dass dann genau ein Orthonormalsystem $w_1, \ldots, w_k$ existiert, so dass für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt

$$w_i \in \mathbb{R}_{>0} v_i + \langle v_{i-1}, \ldots, v_1 \rangle.$$

Bemerkung: Die Existenz des Orthonormalsystems wurde bereits in Satz III.2.3.21 im Skript gezeigt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2: Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - w = 0 \right\}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3.3: Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Kosinus des Winkels ϕ zwischen den beiden Ebenen, die durch die Vektoren $0, v_1, v_2$ bzw. $0, v_1, v_3$ aufgespannt werden.
Überzeugen Sie sich, daß gilt

$$\frac{2\pi}{5} > \phi > \frac{2\pi}{6}.$$

(bitte wenden)

Hinweis: Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist definiert als der kleinere der beiden Winkel zwischen auf diesen Ebenen senkrecht stehenden Vektoren.
Bemerkung: Das regelmäßige Tetraeder ist der durch die Vektoren v_1, v_2, v_3 und den Nullvektor aufgespannte Körper, d.h.

$$T = \left\{ v = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i \in V \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

Mit dieser Aufgabe haben Sie also gezeigt, dass sich der $\mathbb{R}^3$ nicht mit Tetraedern kacheln läßt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3.4: Sei k ein Körper, E eine Menge und $(E, \vec{E}_1, a_1)$ sowie $(E, \vec{E}_2, a_2)$ zwei affine Räume über k mit Punktemenge E. Außerdem sollen die beiden affinen Räume dieselben Geraden haben, d.h. eine Teilmenge $G \subseteq E$ ist genau dann eine Gerade im affinen Raum $(E, \vec{E}_1, a_1)$, wenn sie eine Gerade im affinen Raum $(E, \vec{E}_2, a_2)$ ist. Zeigen Sie, daß dann $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ gilt.
Hinweis: Mit Hilfe geeigneter Parallelogramme kann man die Addition von Punkten auf einer Geraden G geometrisch definieren. Wenn man die Addition hat, hat man auch den Richtungsraum.

(6 Punkte)