Übungen zur Vorlesung “Lineare Algebra II”
SS 2009 Blatt 4

Ausgabe: 14.05.2009, **Abgabe:** 21.05.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss09/la2.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Es werden nur *zwei* Aufgaben abgegeben und bewertet.

Aufgabe 4.1: Sei $(E, \vec{E}, a)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer affiner Raum. Sei $p \in E$ ein Punkt, und L, R zwei von p ausgehende Halbgeraden, d.h. $L = p + \mathbb{R}_{\geq 0} v$ für ein $v \in \vec{E}$ und analog für R. Wir definieren den Winkel zwischen L und R durch

$$\angle(L, R) := \angle(l - p, r - p), \qquad l \in L \setminus p, r \in R \setminus p.$$

(i) Zeigen Sie, daß der so definierte Winkel $\angle(L, R)$ nicht von der Wahl von l, r abhängt.

(ii) Seien L', R' zwei weitere von p ausgehende Halbgeraden. Zeigen Sie, daß es genau dann eine Isometrie $b : E \to E$ mit $b(L) = L'$ und $b(R) = R'$ gibt, wenn gilt
$$\angle(L, R) = \angle(L', R').$$

(8 Punkte)

Aufgabe 4.2: Sei V ein orientierter zweidimensionaler reeller euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $0 \neq v \in V$ ein Vektor. Dann gilt $\measuredangle(v, -v) = \pi$.

(ii) Seien G, H zwei von Null ausgehende Halbgeraden in V. Dann gilt $\angle(G, H) = |\measuredangle(G, H)|$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.3: Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei u ein Vektor mit $\|u\| = 1$, und $\alpha \in [0, 2\pi)$ ein Winkel im Bogenmaß. Sei $v \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Vektor. Wir bezeichnen mit $v_\parallel$ die orthogonale Projektion von v auf u, und setzen $v_\perp = v - v_\parallel$. Wir betrachten die Abbildung

$$D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto (u \times v_\perp) + v_\parallel.$$

(bitte wenden)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Abbildung D ist orthogonal.

(ii) Es gilt $D(u) = u$.

(iii) Für einen beliebigen Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ mit $w \perp u$ gilt $D(w) \perp w$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.4: Gegeben sei die folgende quadratische Form:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 8x_2x_3 + 5x_3^2.$$

Bestimmen Sie die Normalform (wie in Satz III.4.1.1) und die Hauptachsen von q.

(4 Punkte)