Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"
SS 2009   Blatt 5

Ausgabe: 21.05.2009, **Abgabe:** 28.05.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss09/la2.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Es werden nur *zwei* Aufgaben abgegeben und bewertet.

Aufgabe 5.1: Gegeben sei eine Funktion

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c.$$

Zeigen Sie, dass dann eine abstandserhaltende Abbildung $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, so daß

$$(q \circ D)(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_k x_k^2 + \lambda_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_0$$

für geeignetes k und geeignete $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: *Die Gärtnerkonstruktion von Ellipsen.*
Seien p, q zwei Punkte im affinen Raum $\mathbb{R}^2$, und sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, daß die Menge

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - p\| + \|x - q\| = r\}$$

durch eine quadratische Gleichung

$$a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0$$

beschrieben wird.
Wie folgt aus der Aussage von Aufgabe 5.1 die Normalform für Ellipsen

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1?$$

(5 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 5.3: Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, daß f genau dann selbstadjungiert ist, wenn es in V eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren gibt, und alle Eigenwerte von f reell sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 5.4: Sei die folgende Matrix $A \in GL_3(\mathbb{R})$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix B, so daß gilt $B^2 = A$.
Vorsicht, hoher Rechenaufwand.

(6 Punkte)