Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"
SS 2009 Blatt 6

Ausgabe: 28.05.2009, **Abgabe:** 11.06.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss09/la2.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Es werden nur *zwei* Aufgaben abgegeben und bewertet.

Aufgabe 6.1: Wir betrachten die folgende Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß die Definition

$$\langle x, y \rangle = x^\top A y$$

genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ liefert, wenn $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 < 2$ gilt.

(3 Punkte)

Aufgabe 6.2: Wir betrachten die symmetrische Bilinearform b auf dem $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^3$, die durch die folgende Fundamentalmatrix gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Orthogonalbasis für b an.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.3: Zeigen Sie, daß die Exponentialabbildung von Matrizen

$$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$$

eine Bijektion von den symmetrischen Matrizen auf die positiv-definiten symmetrischen Matrizen liefert.

(5 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 6.4: Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines euklidischen Vektorraums heißt *normal* genau dann, wenn $f \circ f^* = f^* \circ f$ gilt, wenn also f mit seinem adjungierten Endomorphismus kommutiert.
Sei nun f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen komplexen euklidischen Vektorraums V. Zeigen Sie, daß f genau dann normal ist, wenn in V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f existiert. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Die Endomorphismen $f + f^*$ und $i(f - f^*)$ sind selbstadjungiert.

(ii) Für zwei kommutierende Endomorphismen f und g von V gibt es stets einen simultanen Eigenvektor, d.h. einen Vektor $0 \neq v \in V$, der sowohl Eigenvektor von f als auch von g ist.

(iii) Folgern Sie aus (i) und (ii) die Behauptung.

(8 Punkte)