Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II" SS 2009 Blatt 7

Ausgabe: 11.06.09, **Abgabe:** 18.06.09

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss09/la2.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Es werden nur *zwei* Aufgaben abgegeben und bewertet.

Aufgabe 7.1: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein k-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, daß V genau dann die direkte Summe der Haupträume $\mathrm{Hau}(f; \lambda)$ ist, wenn f lokal endlich ist, d.h. für jeden Vektor v gibt es einen f-stabilen endlich-dimensionalen Untervektorraum $U_v \subseteq V$, der v enthält.

(6 Punkte)

Aufgabe 7.2: Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der folgenden Matrix in $M_3(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ -1 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie auch die Basis an, in der die Matrix die Jordan-Normalform hat.

(6 Punkte)

Aufgabe 7.3: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und f ein Endomorphismus der Ordnung $n \geq 1$, d.h. $f^n = \mathrm{id}$. Zeigen Sie, daß f dann diagonalisierbar ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst: Wenn g ein nilpotenter Endomorphismus von V ist, dann impliziert $\ker g^n \neq V$ auch $\ker g^n \neq \ker g^{n+1}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 7.4: Geben Sie einen $\mathbb{F}_3$-Vektorraum V und einen Endomorphismus $f : V \to V$ an, so daß die folgenden beiden Aussagen gelten:

(i) f hat endliche Ordnung, d.h. es existiert ein $n \geq 1$ so daß $f^n = \mathrm{id}$.

(ii) f ist nicht diagonalisierbar.

Beweisen Sie Ihre Behauptung!

(2 Punkte)