Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"
SS 2009 Blatt 8

Ausgabe: 18.06.09, **Abgabe:** 25.06.09

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss09/la2.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Es werden nur *zwei* Aufgaben abgegeben und bewertet.

Aufgabe 8.1: Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$, und die Abbildung

$$\phi : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (D, v) \mapsto D \cdot v.$$

(i) Zeigen Sie, daß ϕ eine Gruppenoperation von $SO(3)$ auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

(ii) Beschreiben Sie die Bahnen und den Bahnenraum der Operation ϕ.

(iii) Beschreiben Sie den Stabilisator des Vektors $e_3 = (0, 0, 1)^\top$.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2: Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\phi : \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} : (\lambda, (z_1, z_2)) \mapsto (\lambda z_1, \lambda z_2)$$

eine Gruppenoperation definiert.
Wir bezeichnen den Bahnenraum der Operation mit $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$.
Zeigen Sie weiterhin:

(i) Die Abbildung
$$\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} : z \mapsto (z, 1)$$
induziert eine injektive Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

(ii) Das Komplement des Bildes von ψ ist die einelementige Menge $\{\infty\}$, wobei ∞ die Bahn von $(1, 0)$ bezeichnet.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 8.3: Sei k ein Körper. Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung eine Gruppenoperation definiert:

$$GL(n;k) \times M_n(k) \to M_n(k) : (A, M) \mapsto AMA^{-1}.$$

Sei k nun algebraisch abgeschlossen. Wir bezeichnen mit X die Menge aller endlichen Multimengen von Paaren aus $\mathbb{N}_{\geq 1} \times k$, deren erste Komponenten sich zu n aufaddieren. Dabei ist eine Multimenge eine Menge in der jedes Element mit einer bestimmten Vielfachheit auftritt.
Zeigen Sie, daß es eine Bijektion vom Bahnenraum der Operation auf die Menge X gibt.
Hinweis: Jordan-Normalform

(6 Punkte)

Aufgabe 8.4: Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion daß die Anzahl der Elemente der Gruppe $GL_n(\mathbb{F}_3)$ gleich $\prod_{i=0}^{n-1}(3^n - 3^i)$ ist.
Hinweis: Die Gruppe $GL_n(\mathbb{F}_3)$ operiert auf $\mathbb{F}_3^n$ durch Linksmultiplikation. Zeigen Sie, daß die Operation auf $\mathbb{F}_3^n \setminus \{0\}$ transitiv ist. Die Standgruppe von $(0, \ldots, 0, 1)^\top$ enthält $GL_{n-1}(\mathbb{F}_3)$ als Untergruppe. Die Bahnformel liefert den Induktionsschritt.

(6 Punkte)