Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra und algebraische Geometrie" SS 2010 Blatt 1

Ausgabe: 22.04.2010, **Abgabe:** 29.04.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss10/kommalg.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^3$ gegeben durch $Y = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\}$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{O}(Y)$ isomorph zu einem Polynomring $k[X]$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.2: Die affine Ebene $\mathbb{A}^2$ kann als Menge auf natürliche Art mit $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ identifiziert werden. Zeigen Sie, daß die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2$ nicht die Produkttopologie der Zariski-Topologien auf $\mathbb{A}^1$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.3: Welche der folgenden Teilmengen sind Ideale? (Mit Begründung)

(i) Die Menge $k[X]$ im Ring $k[X, Y]$.

(ii) Die Menge $\{f(X, Y) \in k[X, Y] \mid f(X, 0) = f(0, Y) = 0\}$ in $k[X, Y]$.

(iii) Die Menge $\{n \in \mathbb{Z} \mid 3 \nmid n\}$ im Ring $\mathbb{Z}$.

(iv) Sei R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, $S \subseteq R$ ein Teilring. Ist $S \cap I$ ein Ideal in S? Ist $S \cap I$ ein Ideal in R?

(5 Punkte)

Aufgabe 1.4: Sei $\phi : k[X] \to k[X]$ ein Ringhomomorphismus. Unter welchen Bedingungen ist ϕ ein Isomorphismus?

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Anwesenheitsaufgaben, 27./28.04.10

Aufgabe 1.5:

(i) Bestimmen Sie alle Ideale im Ring $\mathbb{Z}$.

(ii) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}/(n)$ ein Ring ist.

(iii) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}/(n)$ genau dann ein Körper ist, wenn n eine Primzahl ist.

Aufgabe 1.6:

(i) Formulieren Sie den Homomorphiesatz und die Isomorphiesätze für Vektorräume.

(ii) Zeigen Sie, daß es einen Ringisomorphismus $\mathbb{C}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ gibt.

(iii) Bestimmen Sie alle Ideale in $\mathbb{Z}[X]/(6, x^2+5x+3)$. Berechnen Sie $\mathbb{Z}[X]/(6, x^2+5x+3)$.

Aufgabe 1.7:

(i) Geben Sie die Definition des Begriffs topologischer Raum an.

(ii) Eine Menge B von Teilmengen eines topologischen Raums X heißt Basis, wenn jede Menge aus B offen ist und jede offene Menge sich als Vereinigung von Mengen aus B darstellen läßt.

Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Verifizieren Sie, daß die Mengen $I(a) = \{b \in X \mid a \leq b\}$ erzeugen eine Topologie auf X. Bilden diese Mengen eine Basis der Topologie (wenn ja warum, wenn nein warum nicht)?

(iii) Ein topologischer Raum X heißt hausdorffsch, wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ disjunkte offene Umgebungen U_x von x und U_y von y existieren. Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn X nicht als Vereinigung von zwei disjunkten nichtleeren offenen Teilmengen geschrieben werden kann.

Wann ist der topologische Raum aus (ii) hausdorffsch bzw. zusammenhängend?