Übungen zur Vorlesung “Kommutative Algebra und algebraische Geometrie” SS 2010 Blatt 10

Ausgabe: 01.07.2010, **Abgabe:** 08.07.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss10/kommalg.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 10.1: Sei $f : X \to Y$ ein endlicher Morphismus von affinen Varietäten. Zeigen Sie, daß für eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq X$ auch das Bild $f(Z)$ wieder abgeschlossen ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 10.2:

(a) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und A eine reduzierte k-Algebra, die als k-Modul von endlichem Rang ist. Zeigen Sie, daß es dann ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt
$$A \cong \sum_{i=1}^{n} k.$$

(b) Folgern Sie aus (a), daß für einen endlichen Morphismus $f : X \to Y$ von affinen Varietäten jeder Punkt $P \in Y$ als Urbild $f^{-1}(P)$ nur endlich viele Punkte hat.

(c) Geben Sie ein Beispiel eines Morphismus $f : X \to Y$, bei dem jeder Punkt $P \in Y$ als Urbild nur endlich viele Punkte hat, der aber trotzdem kein endlicher Morphismus ist.

(10 Punkte)