Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra und algebraische Geometrie" SS 2010 Blatt 12

Ausgabe: 15.07.2010, **Abgabe:** 22.07.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss10/kommalg.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 12.1:
Sei V eine irreduzible projektive Varietät, $S(V) = k[X_0, \ldots, X_n]/I(V)$ der homogene Koordinatenring von V. Die Menge T der von 0 verschiedenen homogenen Elemente von $S(V)$ ist eine homogene multiplikative Teilmenge. Zeigen Sie, daß es einen Isomorphismus $T^{-1}S(V)_0 \cong k(V)$ gibt, wobei $T^{-1}S(V)_0$ die Elemente vom Grad 0 in der Lokalisierung $T^{-1}S(V)$ bezeichnet.

(6 Punkte)

Aufgabe 12.2: Sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul. Ein R-Modul M heißt *einfach*, wenn 0 und M die einzigen R-Untermoduln von M sind. Eine Kette von R-Untermoduln von M

$$M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n$$

heißt *Kette der Länge n*. Eine solche Kette heißt *Kompositionsreihe*, wenn $M_0 = 0$, $M_n = M$ und jeder Modul M_i/M_{i-1} einfach ist. Die Länge des R-Moduls M ist definiert als die Länge einer Kompositionsreihe von M. Der Satz von Jordan-Hölder besagt, daß alle Kompositionsreihen von M die gleiche Länge haben, daß also die Länge wohldefiniert ist.

(i) Zeigen Sie, daß die Länge additiv ist, d.h. für eine exakte Sequenz von R-Moduln
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$
ist die Länge von M gleich der Summe der Längen von M' und M''.

(ii) Zeigen Sie, daß ein $\mathbb{Z}$-Modul M genau dann endliche Länge hat, wenn er nur endlich viele Elemente hat.

(iii) Bestimmen Sie die Länge der zyklischen Moduln $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

(8 Punkte)