

# Übungen zur Vorlesung “Kommutative Algebra und algebraische Geometrie”

## SS 2010 Blatt 2

Ausgabe: 29.04.2010, Abgabe: 06.05.2010

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss10/kommalg.html>

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

**Aufgabe 2.1:** Sei  $f : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, daß das Urbild  $f^{-1}(I)$  eines Ideals  $I \subseteq B$  wieder ein Ideal ist.

(2 Punkte)

**Aufgabe 2.2:** Nennen Sie einen Satz aus der Linearen Algebra, dessen Übertragung auf allgemeine Ringe und Moduln nicht gilt.

Nennen Sie einen Satz aus der linearen Algebra, der für Hauptidealringe aber nicht allgemein für Ringe gilt.

Begründen Sie Ihre Behauptungen jeweils durch ein Beispiel.

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.3:** Sei  $A$  ein Ring,  $M$  ein  $A$ -Modul, und  $N_1, N_2 \subseteq M$  Untermoduln von  $M$ . Zeigen Sie: Wenn  $M/N_1$  und  $M/N_2$  noethersche Moduln sind, dann ist auch  $M/(N_1 \cap N_2)$  noethersch.

(6 Punkte)

**Aufgabe 2.4:** Zeigen Sie, daß für  $d \in \mathbb{Z}$  der Ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

noethersch ist, ohne den Hilbertschen Basissatz zu benutzen.

(6 Punkte)