Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra und algebraische Geometrie" SS 2010 Blatt 5

Ausgabe: 20.05.2010, **Abgabe:** 04.06.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss10/kommalg.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Zur Abgabe am 04.06.: Am 03.06. findet keine Vorlesung statt. Die Abgabe der Übungszettel erfolgt entweder am 01./02.06. in der Übungsgruppe oder am 04.06. in den Karton vor Raum 434.

Aufgabe 5.1: Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, daß X genau dann noethersch ist, wenn alle offenen Teilmengen quasikompakt in der induzierten Topologie sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: Sei R ein Ring. Das *Jacobson-Radikal* von R ist definiert als der Schnitt aller maximalen Ideale von R.

(i) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine endlich erzeugte k-Algebra ohne nilpotente Elemente.

Zeigen Sie, daß das Jacobson-Radikal von R gleich (0) ist.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring, in dem das Jacobson-Radikal nicht gleich dem Nilradikal ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 5.3: Zeigen Sie

$$k[X_1, \ldots, X_n] = \bigcap_{\mathfrak{p} \subseteq k[X_1,\ldots,X_n] \text{ prim}} k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{p}}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5.4: Erstellen Sie eine Liste aller bisherigen Definitionen aus der Vorlesung. Lernen Sie die Definitionen, es gibt einen Vokabeltest in den Übungsgruppen in der Woche vom 31.05.-04.06.