Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra und algebraische Geometrie" SS 2010 Blatt 7

Ausgabe: 10.06.2010, **Abgabe:** 17.06.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss10/kommalg.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Sei A ein Ring, und $f : M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Zeigen Sie, daß f genau dann injektiv bzw. surjektiv ist, wenn für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$ der induzierte Homomorphismus $f_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ injektiv bzw. surjektiv ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei A ein Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, M ein A-Modul.

(i) Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung wohldefiniert und bilinear ist:

$$S^{-1}A \times M \to S^{-1}M : (\frac{a}{s}, m) \mapsto \frac{am}{s}.$$

(ii) Zeigen Sie, daß die Abbildung aus (i) einen Isomorphismus

$$S^{-1}A \otimes_A M \xrightarrow{\cong} S^{-1}M$$

induziert.

(6 Punkte)

Aufgabe 7.3: Gegeben sei ein Polynom $f(X_1, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]$ und $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ die dadurch definierte affine Varietät. Homogenisieren liefert ein homogenes Polynom $F(X_0, X_1, \ldots, X_{n+1}) \in k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie, daß der Abschluß von $V(f)$ in $\mathbb{P}^n$ genau die durch F definierte projektive Varietät ist.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 7.4: Die Gleichung $x^3 - 3xy + 1 = 0$ definiert eine affine Kurve in $\mathbb{A}^2$, wir bezeichnen mit C den Abschluß dieser Kurve im $\mathbb{P}^2$. Geben Sie für die affinen Teilmengen

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^2, i = 0, 1, 2$$

jeweils die definierende Gleichung von $C \cap U_i$ an. Zeichnen Sie die reellen Graphen der entsprechenden Kurven.

(6 Punkte)