Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra und algebraische Geometrie" SS 2010 Blatt 8

Ausgabe: 17.06.2010, **Abgabe:** 24.06.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss10/kommalg.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: In der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ definieren wir eine projektive Gerade G als Verschwindungsmenge $V(F)$ für ein lineares Polynom $F(X_0, X_1, X_2) = a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2$. Zeigen Sie, daß sich zwei projektive Geraden G_1 und G_2 mit $G_1 \neq G_2$ in genau einem Punkt schneiden. Zeigen Sie, daß sich zwei verschiedene parallele Geraden im $\mathbb{A}^2$ im Unendlichen schneiden.

(6 Punkte)

Aufgabe 8.2: Zeigen Sie, daß es einen Isomorphismus von projektiven Varietäten

$$V(X^2 + Y^2 - Z^2) \to \mathbb{P}^1$$

gibt. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Stereographische Projektion vom Punkt $(0, 1)$ liefert eine Abbildung

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \setminus \{(0, 1)\} \to V(Y).$$

Geben Sie die Abbildungsvorschrift an.

(ii) Zeigen Sie, daß dies einen Isomorphismus von affinen Varietäten induziert.

(iii) Zeigen Sie, daß diese Abbildung zu einer Abbildung

$$V(X^2 + Y^2 - Z^2) \to \mathbb{P}^1$$

fortgesetzt werden kann. Zeigen Sie, daß diese Abbildung ein Isomorphismus ist.

(iv) Erklären Sie, wie diese Konstruktion die Erzeugerformel für pythagoreische Tripel liefert: Alle pythagoreischen Tripel (a,b,c) mit $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, c) = \mathrm{ggT}(b, c) = 1$ sind von der Form $(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$ für ganze Zahlen m, n.

(8 Punkte)