Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra und algebraische Geometrie" SS 2010 Blatt 9

Ausgabe: 24.06.2010, **Abgabe:** 01.07.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss10/kommalg.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Prüfungsanmeldung: Studierende im Bachelor-Studiengang Mathematik müssen sich online zu den Prüfungen anmelden. Die Anmeldefrist läuft vom 21.06. bis 04.07.2010. Weitere Informationen finden Sie auf den Seiten des Prüfungsamtes:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/pruefungsamt/info-bsc.de.html

---

Aufgabe 9.1: Wir betrachten den Morphismus von Varietäten

$$\pi : \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1} : (X_0, \dots, X_n) \mapsto [X_0 : \dots : X_n].$$

Zeigen Sie, daß eine Menge $U \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ genau dann offen in der Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^{n-1}$ ist, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U)$ offen in der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2: Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten, und $P \in X$ ein Punkt. Zeigen Sie, daß Zusammensetzen mit f einen Ringhomomorphismus von lokalen Ringen

$$\phi : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$$

induziert. Zeigen Sie außerdem, daß dieser Ringhomomorphismus *lokal* ist, d.h. $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_{X,P}) = \mathfrak{m}_{Y,f(P)}$, wobei $\mathfrak{m}_{X,P}$ bzw. $\mathfrak{m}_{Y,f(P)}$ jeweils das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,P}$ bzw. $\mathcal{O}_{Y,f(P)}$ bezeichnet.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 9.3: Beweisen Sie den Austauschsatz für algebraisch unabhängige Elemente: Sei L/K eine Körpererweiterung, $b_1, \ldots, b_n$ eine Transzendenzbasis von L, sowie x ein transzendentes Element. Dann gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so daß $b_1, \ldots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \ldots, b_n$ wieder eine Transzendenzbasis ist.
(Insbesondere ist der Transzendenzgrad einer Körpererweiterung wohldefiniert.)

(6 Punkte)

Aufgabe 9.4: Bestimmen Sie die Dimension der Varietät $V(I) \subseteq \mathbb{P}^3$, die durch das homogene Ideal $I = (XZ - Y^2, YW - Z^2, XW - YZ)$ gegeben ist.

(4 Punkte)