SEMINAR K-THEORIE
SOMMERSEMESTER 2010

Allgemeines

K-Theorie ist weniger eine Theorie als vielmehr eine systematische Methode zur Konstruktion von Invarianten. Sie kann in vielen verschiedenen Settings benutzt werden: Topologie, Algebra, algebraische Geometrie, Zahlentheorie und Funktionalanalysis. K_0 für eine Mannigfaltigkeit ist die Grothendieck-Gruppe der Vektorbündel. Die meisten kohomologischen Konstruktionen können auf der Ebene der K-Gruppen studiert werden. Wir wollen in verschiedenen Settings die Definitionen und Eigenschaften kennenlernen. Am Ende soll gezeigt werden, dass so unterschiedliche Sätze wie Grothendieck-Riemann-Roch für algebraische Varietäten und der Atiyah-Singer-Indexsatz für elliptische Differentialoperatoren als Aussagen über K-Theorie aufgefasst werden können. Wir wünschen uns daher Teilnehmer und Teilnehmerinnen mit sehr unterschiedlichen Vorkenntnissen.

Im Programm sind neunzehn Vorträge angegeben. Wie viele und welche dieser Vorträge im Seminar wirklich gehalten werden, hängt stark von den einzelnen Vorkenntnissen der Teilnehmer ab. Das endgültige Programm wird erst bei der Vorbesprechung Gestalt annehmen. Die Vorbesprechung findet am 08. Februar 2010 um 13.00 Uhr im Seminarraum 403, Eckerstrasse 1, statt.

Selbstverständlich können Sie andere als die angegebene Literatur verwenden. Wir haben im Literaturverzeichnis viele mögliche Quellen angegeben. Bevor Sie weit vom Programm abweichen, sollten Sie sich aber mit uns kurzschließen.

Selbstverständlich können Sie uns jederzeit mit Fragen kontaktieren.

Vorkenntnisse.

- Ringe, Moduln, direkte Summe, Tensorprodukt
- Topologische Räume, speziell CW-Komplexe, Mannigfaltigkeiten
- Homotopie von Abbildungen (mit Basispunkt)
- Vektorbündel, Schnitte
- Kategorien, Funktoren
- Fundamentalgruppe

1. Algebraische K-Theorie von Ringen

1.1. K_0 von Ringen.

- projektive Moduln: universelle Eigenschaft, direkter Summand von freien Moduln
- Gruppenkomplettierung einer kommutativen Halbgruppe,
- $K_0(R)$ für Ringe, Rangabbildung
- Charakterisierung durch Idempotente,
- Morita Äquivalenz
- Beispiel Körper.
- Falls genug Zeit ist: Definition von $G_0(R)$, Poincaré-Hom. $K_0(R) \to G_0(R)$.

Literatur: [Ro] 1.1 und 1.2

Übungsaufgabe: Charakterisierung von projektiven Moduln über lokalen Ringen, $K_0(R)$ für lokale Ringe, euklidische Ringe ($\mathbf{Z}$)

1.2. K_1 von Ringen.

- $K_1(R)$ definieren
- Determinante und $SK_1(R)$
- Beispiele Schiefkörper, lokale Ringe

Literatur: [Ro] 2.1, 2.2

Übungsaufgabe: Morita-Äquivalenz, K_i für halbeinfache Algebren

1.3. Der zahlentheoretische Fall.

(Vorkenntnisse in algebraischer Zahlentheorie hilfreich, aber nicht nötig)

- Der Begriff des Dedekindrings
- Beispiel Ganzheitsringe von Zahlkörpern, konkreter in quadratischen Zahlkörpern,
- Definition der Klassengruppe eines Dedekindrings als Pic, also als multiplikative Gruppe der projektiven Moduln vom Rang 1
- Berechnung von $K_0(R)$ und $K_1(R)$
- Formulierung der Sätze zur Endlichkeit der Klassenzahl, Endlicherzeugtheit der Einheitengruppe, Klassenzahlformel

Literatur: [N] Ch I, VII §5; [Ro] 1.4, 2.4

Übungsaufgabe: Vergleich mit Definition der Klassengruppe aus der algebraischen Zahlentheorie, Explizites Rechnen mit Idealen von Ganzheitsringen

1.4. λ-Ring-Struktur.

- Definition von λ-Ringen und speziellen λ-Ringe
- Adams-Eigenräume
- Beispiel Darstellungsringe
- Beispiele topologische K-Theorie, K-Theorie von Ringen und Varietäten (ohne Beweis, vergleiche Vorträge 3.5 und 2.4

Literatur: [FL] I§§1, 2, 6 oder erster Teil von [Se]

Übungsaufgabe: Berechnung einiger der universellen Polynome aus den λ-Ring Identitäten

1.5. **Topologische Anwendung: Whiteheadtorsion und s-Kobordismus.** (optional, sehr gute Vorkenntnisse in Topologie nötig)

- K-Theorie von Gruppenringen
- Definition der Whiteheadgruppe und Whiteheadtorsion
- Anwendung auf s-Kobordismus von Mannigfaltigkeiten (ohne Beweis),
- Beweis der Poincaré-Vermutung in Dimension ≥ 6.

Literatur: [Ro] 1.6, [C]

Übungsaufgaben: Siehe [Ro]; Beispiele aus [Oliver] (Zitiert in [Ro])

1.6. **Reguläre Ringe.** (optional)

- Definition von regulären Ringen über Existenz von endlichen projektiven Auflösungen
- Beispiele (Zahlringe, Polynom- und Potenzreihenringe über Körpern) ohne Beweis
- Definition von $G_0(R)$, falls noch nicht geschehen
- Vergleich von $K_0(R)$ und $G_0(R)$ für reguläre Ringe. z.B. [Sw]

Literatur: z.B. [Sw] Ch. 4

Übungsaufgabe: Regularität von PDE-Ringen, Hilberts Basissatz (Regularität von $k[t]$), Beispiele für projektive Auflösungen

1.7. **Homotopieinvarianz der algebraischen K-Theorie.** (optional)

- K_0 für graduierte Ringe
- Hilbertscher Basissatz (ohne Beweis)
- Homotopieinvarianz: $K_i(A[t]) \cong K_i(A)$ für reguläre, kommutative, noethersche Ringe

Literatus: [Sw] Ch. 6

Übungsaufgabe: Hilbertscher Basissatz, Lemmata über graduierte Moduln, für die die Zeit nicht reichte

2. Algebraische K-Theorie von Varietäten

Die Literatur zu diesem Thema benutzt oft die Sprache der Schemata. Wir wollen uns in den Vorträgen auf Varietäten beschränken. In der Darstellung ist es sinnvoll, immer wieder die Begriffe der Differentialtopologie zu benutzen. (Vollständig heißt für komplexe Mannigfaltigkeiten kompakt, lokalfreie Garben sind Vektorbündel, Differentialformen sind Schnitte des Kotangentialbündels etc.) Auch beim Lesen kann an jeder Stelle Schema durch Varietät ersetzt werden, so dass die meisten Vorträge auch für Teilnehmer geeignet sind, die nur Grundkenntnisse in algebraischer Geometrie haben. Einige Vorträge sind so formal, dass selbst dies nicht nötig ist.

2.1. K_0 für Varietäten.

- Schnelle Definition von projektiven und affinen Varietäten (über algebraische abgeschlossenen Körpern), dabei auf Irreduzibilitätsbedingungen verzichten
- Glattheit
- geometrische Definition von Geraden- und Vektorbündeln (nicht als lokalfreie Garben)
- Pic und $K_0(X)$
- Affiner Koordinatenring, dessen Regularität im glatten Fall
- Äquivalenz von projektiven Modulen über $k[V]$ und Vektorbündeln auf V.

Es sollten so viele Aussagen bewiesen werden, wie die Zeit zulässt.

Literatur: [Sh1] I.2, II.1, [Sh2] VI 1.2-1.4,

Übungsaufgabe: projektiver Koordiantenring, Geradenbündel auf $\mathbf{P}^n$, ebene Kurven und deren Glattheit

2.2. Der Kurvenfall.

- Berechnung von $K_0(X)$ für glatte Kurven
- Formulierung des Satzes von Riemann-Roch für Kurven
- Anwendungsbeispiele, z.B. Gruppengesetz auf projektiven Kurven vom Geschlecht 1 via Identifikation mit Pic.

Literatur: z.B. [H] II.6, IV.1, IV.2, vergleiche auch Appendix A; elementarer: [F1]; vergleiche auch [F2] Example 15.2.1

Übungsaufgaben: Kanonischer Divisor und Geschlecht von $\mathbf{P}^1$, Kurven vom Grad d, geometrische Konstruktion der Addition auf elliptischen Kurven, Eigenschaften von Pic

2.3. Chernklassen.

- Axiomatische Konstruktion von Chernklassen $K_0(X) \to A(X)$ nach Grothendieck
- für Varietäten über $\mathbf{C}$: $A(X) = H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ singuläre Kohomologie (ohne Beweis)
- in Charakteristik 0: de Rham-Kohomologie (ohne Beweis)

Literatur: [Gr]

Übungsaufgabe: c_1 für Geradenbündel in singulärer und de Rham-Kohomologie, Verifikation einiger Axiome für diese beiden Theorien

2.4. λ-Ringstruktur von $K_0(X)$. (Vertrautheit mit Garbensprache nötig)

- γ-Filtrierung auf $K_0(X)$ für quasi-projektive X
- Adams-Eigenräume
- Formulierung der Aussage, dass $A = \mathrm{Gr}K \otimes \mathbf{Q}$ in der Konstruktion der Chernklassen gewählt werden kann.
- Beweisskizze, soweit Zeit ist

Literatur: [FL] III §§1-3 Ch. V, [SGA6]

Übungsaufgaben: Lemmata

2.5. **Chowgruppen.** (optional, auch mehrere Vorträge, gute Kenntnisse der algebraischen Geometrie nötig)

- Definition der Chowgruppen und des Schnittproduktes [F2]
- Isomorphismus von Adams-Eigenräumen auf $K_0(X)$ mit den Chowgruppe via Chernklasse

Literatur: [F2], [H] Appendix A.

Übungsaufgabe: Chowgruppe des projektiven Raums, Satz von Bézout für ebene Kurven

2.6. **Grothendieck-Riemann-Roch.** (optional, sehr gute Kenntnisse der algebraischen Geometrie nötig)

- Das Theorem von Grothendieck-Riemann-Roch für eine axiomatische Theorie A: Formulierung und Beweisskizze nach Fulton-Lang
- Spezialisierung für Kurven

Literatur: [FL], vergleiche auch [F2] Ch. 15

Übungsaufgaben: Beispiele

3. Topologische K-Theorie

3.1. **Der Satz von Serre-Swan.** [A, 1.4.12–1.4.14 und Ende von §1.4, §2.1]. *Annahme:* X ist stets ein kompakter Hausdorff-Raum.

- Schnittfunktor $\Gamma\colon \mathrm{Vekt}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{C}(X)}$ liefert Kategorien-Äquivalenz von trivialen Vektorbündeln und freien $\mathcal{C}(X)$-Moduln
- Zu jedem Vektorbündel $E \to X$ existiert $F \to X$ mit $E \oplus F \to X$ trivial
- Äquivalenzen $\Gamma\colon \mathrm{Vekt}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathrm{Proj}_{\mathcal{C}(X)}$, $\Gamma\colon \mathrm{Vekt}(X) \to \mathrm{Proj}_{\mathcal{C}(X;\mathbb{C})}$
- Definition von $K^0(X)$, zeige $K^0(X) = K_0(\mathcal{C}(X;\mathbb{C}))$ (Vortrag 1.1 darf benutzt werden)
- trivial versus stabil trivial; Beispiel $TS^2 \to S^2$

3.2. **Klassifizierende Räume.** [A, 1.4.6–1.4.9, 1.4.15], [Ha, §1.2]

- Reduzierte Suspension SX, $K^{-n}(X) = K^0(S^n X)$,
- $\mathrm{Vekt}^n(SX) = [X, GL(n,\mathbb{C})]$ (Homotopieklassen mit Basispunkt)
- Zurückziehen von Vektorbündeln, Homotopie-Invarianz
- Grassmann-Mannigfaltigkeiten $G_n(\mathbb{C}^m)$, tautologisches Vektorbündel
- $BGL(n,\mathbb{C}) := G_n(\mathbb{C}) := \lim_{\to} G_n(\mathbb{C}^m)$, $BGL(\mathbb{C}) := \lim_{\to} G_n(\mathbb{C})$
- $\mathrm{Vekt}^n(X) = [X, BGL(n,\mathbb{C})]$, $\tilde{K}^0(X) = [X, \mathbb{Z} \times BGL(\mathbb{C})]$
- $\tilde{K}^0$, $\tilde{K}^{-1}$ als darstellbare Funktoren

3.3. **Bott-Periodizität.** [A, §2.2] [Ha, §2.2]

- Produkt auf $K^0(X)$, $\tilde{K}^0(X)$
- Produktsatz, allgemeine Form [A, Theorem 2.2.1] mit Beweis (soweit möglich)
- Bott-Periodizität [Ha, Theorem 2.11]

Übungsaufgaben: $K^0(S^n)$ für alle n, eventuell fehlende Beweisschritte nachholen

3.4. **K-Theorie als verallgemeinerte Kohomologietheorie.** [A, §2.4] [Ha, §2.2]

- Sechs-Term-Sequenz für $\tilde{K}^\bullet(X)$
- Axiome für reduzierte verallgemeinerten Kohomologie-Theorien
- $\tilde{K}^\bullet(X)$ erfüllt diese Axiome
- Eventuell elementare Anwendungen
- Produktstruktur auf $\tilde{K}^\bullet(X)$

Übungsaufgabe: Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes und ähnliche Anwendungen ([Ha, S. 58])

3.5. **Thom-Isomorphismus, Spaltungsprinzip.** [A, §§2.6, 2.7]

- Fünferlemma; Satz von Leray-Hirsch für K-Theorie [A, 2.7.8]
- Spaltungsprinzip für komplexe Vektorbündel
- Thom-Isomorphismus für K-Theorie und Bott-Periodizität
- Die Künneth-Formel für K-Theorie

Übungsaufgabe: λ-Ring-Struktur auf $K^0(X)$, vgl. Vortrag 1.4

3.6. **Divisionsalgebren und parallelisierbare Sphären.** (optional) Vortrag 1.4 darf vorausgesetzt werden [Ha, §2.3]

- Divisionsalgebren, parallelisierbare Sphären und H-Räume
- Die Hopf-Invariante einer Abbildung $S^{2n-1} \to S^{n-1}$
- Adams-Operatoren ψ^k, Wirkung auf $\tilde{K}(S^{2n})$
- Beweis des Satzes von Adams

Übungsaufgaben: Quaternionen und Geometrie des $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle, \times)$, Konstruktion der Oktaven und elementare Eigenschaften

4. Charakteristische Klassen und Indextheorie

Die Vorträge in diesem Abschnitt erfordern gute Vorkenntnisse in Geometrie und Topologie.

4.1. **Kohomologie und charakteristische Klassen.** [Ha, §3.1][Sha, §1] Vorkenntnisse: Kohomologie

- Axiome für Kohomologie, Satz von Leray-Hirsch
- Kohomologie von $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{C}P^\infty$
- Chern-Klassen, Multiplikativität
- Chern-Charakter $\mathrm{ch}(E)$ und Todd-Klasse $\mathrm{td}(E)$

4.2. **Der abstrakte Atiyah-Singer-Indexsatz.** [Sha, §§1.3, 1.8, 1.9]

- Elliptische Differentialoperatoren über X, Symbol $\sigma(D) \in \tilde{K}(TX^+)$
- Der analytische Index (ohne Erklärungen)
- Die Abbildung $\iota_!$, der K-theoretischer Index $B(\sigma(D))$
- Fundamentalklasse $[TX]$ von TX^+, kohomologischer Index
- Der abstrakte Satz von Atiyah-Singer (ohne Beweis)

4.3. **Wichtige Spezialfälle des Atiyah-Singer-Indexsatz.** [Sha, §§2.1–2.3]

- Hodge-Theorie und Eulerzahl, Satz von Gauß-Bonnet-Chern
- Der Signatursatz von Hirzebruch
- Der Dolbeault-Operator und der Satz von Riemann-Roch

4.4. **Anwendungen des Indexsatzes.** (optional) Vorkenntnisse: Differentialgeometrie

- Spin-Mannigfaltigkeiten, Stiefel-Whitney-Klassen und der Dirac-Operator
- Der Satz von Lichnerowicz über Metriken positiver Skalarkrümmung
- Ganzzahligkeit charakteristischer Zahlen, Satz von Rokhlin

Literatur

[HB] E. Friedlander, D. Grayson eds., Handbook of K-theory 1, Springer Verlag 2005.

[SGA6] Berthelot, Grothendieck, Illusie eds., SGA 6, Théorie des Intersections et Théorème de Riemmann-Roch, Springer Lecture Notes in Mathematics 225.

[A] M. F. Atiyah, *K-Theory,* W. A. Benjamin, Amsterdam 1964.

[B] H. Bass, Algebraic K-Theory, W. J. Benjamin Inc. 1968.

[C] M. Cohen, A course in simple-homotopy theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 10. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1973.

[CMR] J. Cuntz, R.Meyer, J. M. Rosenberg, Topological and Bivariant K-Theory, Birkhäuser, Basel 2007.

[F1] W. Fulton, Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry, W. A. Benjamin, Inc. 1969.

[F2] W. Fulton, Intersection Theory, Intersection Theory, 2. Auflage, Springer Verlag 1998.

[FL] Riemann-Roch algebra, Grundlehren der math. Wissenschaften 277, Springer Verlag 1985.

[Gr] A. Grothendieck, La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. math. France 86, 1958, 137–154.

[H] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Text in Mathematics, Springer Verlag 1977.

[Ha] A. Hatcher, *Vector Bundles and K-Theory,* Preprint 2003, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html`

[Hi] N. Higson, The Local Index Formula in Noncommutative Geometry, `http://www.math.psu.edu/higson/Papers/trieste.pdf`

[Lo] J.-L. Loday, Cyclic Homology, Grundlehren 301, Springer, Berlin 1992.

[Ma] B. Magurn, An Introduction to K-Theory, Cambridge University Press 2002.

[Mi] J. Milnor, Introduction to Algebraic K-Theory, Annals of Mathematical Studies 72, Princeton University Press 1971.

[MiS] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, Characteristic Classes, Princeton University Press, Princeton NJ 1974.

[N] J. Neukirch, Algebraic Number Theory, Grundlehren der Mathematik 322, Springer Verlag 1999.

[Ro] J. Rosenberg, Algebraic K-theory and Its Applications, Graduate Text in Mathematics 147, Springer Verlag 1994.

[Se] W. Seiler, λ-Rings and Adams operations in algebraic K-theory, in: Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions, Rapoport, Schappacher, Schneider Eds, Perspectives in Mathematics 4, Academic Press 1988.

[Sh1] I. Shafarevich, Basic algebraic geometry 1, Springer Verlag 1994.
[Sh2] I. Shafarevich, Basic algebraic geometry 2, Springer Verlag 1994.
[Sha] P. Shanahan, *The Atiyah-Singer Index Theorem,* Lect. Notes Math. 638, Springer, Berlin 1978.
[Si] Silverster, Introduction to Algebraic K-theory, Chapman and Hall 1981.
[Sr] Srinivas, Algebraic K-theory, Progress in Mathematics 90, Birkäuser Verlag 1996.
[Sw] R.G. Swan, Algebraic K-Theory, Springer Lecture Notes in Mathematics 76, Springer Verlag 1968.

Prof. Dr. Sebastian Goette sebastian.goette@math.uni-freiburg.de
Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter annette.huber@math.uni-freiburg.de
Math. Institut
Eckerstr. 1
79104 Freiburg