

Seminar Bäume

Sommersemester 2011

Stand 20. Mai 2011

Bäume sind Graphen, die keine Schleifen enthalten. Wenn eine Gruppe auf einem Baum operiert, kann man aus der Kombinatorik der Operation Aussagen über die Struktur der Gruppe ableiten. Das ist der eindimensionale Anfang der geometrischen Gruppentheorie. Im Seminar soll es genau um dieses Zusammenspiel von Algebra und Geometrie gehen: Was können wir über Gruppen sagen, die auf Bäumen operieren? Die Theorie hat viele interessante Konsequenzen, zum Beispiel sind Untergruppen von freien Gruppen immer frei.

Das Seminar wird sich weitgehend am Buch von Serre [Ser80] orientieren. Als Beispiele der Theorie werden wir die Bianchi-Gruppen $PSL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-d}])$ betrachten, die im Buch von Fine [Fin89] behandelt werden. Am Ende des Seminars wird ein Ausblick auf den zwei-dimensionalen Fall, die Theorie von Dreiecken von Gruppen [Sta91], gegeben.

Organisatorische Bemerkung: Es gibt eine Blockveranstaltung mit vier Vorträgen am 03.06.2011. Die entsprechenden Vorträge finden im Seminarraum 127 statt. Am 9.6. gibt es zusätzlich zum regulären Termin einen Zusatztermin 16-18 Uhr im Seminarraum 127. Außerdem gibt es zwei Vorträge am 10.6. und 29.7., jeweils 14-16 Uhr im Seminarraum 127.

1 Vorträge

1. Universelle Konstruktionen und Amalgame

05.05.2011 und 12.05.2011

universelle Konstruktionen, Limits und Kolimits in Kategorien (Beispiele aus der Vorlesung Lineare Algebra: Quotientenräume, direkte Summe, Tensorprodukt) [ML98] (insbesondere Abschnitt III.3)

Definition von Amalgam (amalgamierte Summe) und freiem Produkt von Gruppen [Ser80, Kap 1.2]. Reduzierte Worte und Struktur von Amalgamen [Ser80, Kap 1.3]. Übungsaufgabe 1.1.2.

2. Beispiele

19.05.2011 und 26.05.2011

HNN-Konstruktion, Definition und Anwendung [Ser80, Kap 1.4]. Satz von Novikov-Boone erklären, s. [Mil92, p.7]

[Ser80, Beispiel 1.5.2] mit Übungsaufgabe 1.5.3, [Ser80, Beispiel 1.5.1] mit Beweis, die anderen Beispiele ohne Beweis.

3. Graphen und Bäume

03.06.2011

[Ser80, Kapitel 2]

4. Bäume und freie Gruppen

03.06.2011

[Ser80, Kapitel 3]

5. Bäume und Amalgame I+II

03.06.2011

[Ser80, Kapitel 4], insbesondere ausführliche Diskussion von [Ser80, Beispiel 4.2(c)]. [Ser80, Theorem 8] und Anwendung auf endliche Untergruppen von $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Bäume für $SL_2(k[t])$, [Ser80, Abschnitte II.1.1-I.1.4,II.1.6] alles auf den Spezialfall $SL_2(k[t])$ bezogen.

6. Bianchi-Gruppen I-III

09.06. (Doppelsitzung) und 10.06.2011

Definition Bianchi-Gruppen: $PSL_2(\mathcal{O}_K)$ mit K ein imaginär quadratischer Zahlkörper. Vorstellen der allgemeinen Aussagen über Bianchi-Gruppen: Präsentation, Amalgam-Zerlegung, endliche Untergruppen [Fin89, Kapitel 4,6].

Ein Beispiel (z.B. $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$) detailliert ausarbeiten, Amalgam-Zerlegung (bzw. des entsprechenden Baums) aus geometrischem Fundamentbereich ableiten, [Flö83] oder [Men79] in Analogie zu $PSL_2(\mathbb{Z})$ im Vortrag 5.

Diese Vorträge sind schwieriger als die anderen, es sollten Grundkenntnisse in Topologie vorhanden sein.

7. Graphen von Gruppen und der Struktursatz I+II

30.06.2011 und 07.07.2011

[Ser80, Abschnitte 5.1-5.4]. Hauptergebnis ist Theorem 13, Ziel ist ein möglichst vollständiger Beweis.

8. Anwendungen des Struktursatzes

14.07.2011

Satz von Kurosh [Ser80, Abschnitt 5.5]. Satz von Krstić-McCool [KM97].

9. Amalgame und Fixpunkte I+II

21.07.2011 und 28.07.2011

[Ser80, Kapitel 6]. Beispiele für Gruppen mit Eigenschaft (FA): $SL_3(\mathbb{Z})$, $Sp_4(\mathbb{Z})$ [Ser80]. $PSL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}])$ [Alp96, Corollary II.1], [Fin89, 4.4.2] oder [Ser80, Übung 6.5.5].

10. Ausblick: Dreiecke von Gruppen

29.07.2011

Definition Dreieck von Gruppen, Winkel zwischen Untergruppen [Sta91].
Formulierung des Hauptsatzes über nicht-positiv gekrümmte Dreiecke von
Gruppen [Sta91, Theorem 1, 2]. (Beweisidee am Beispiel illustrieren)
Beispiele: $PSL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}])$ [Alp96], affine Coxeter-Gruppe \tilde{A}_2 .

Literatur

- [Alp96] R.C. Alperin. Normal subgroups of $PSL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}])$. Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 10, 2935–2941.
- [Fin89] B. Fine. Algebraic theory of the Bianchi groups. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 129. Marcel Dekker, 1989.
- [Flö83] D. Flöge. Zur Struktur der PSL_2 über einigen imaginär-quadratischen Zahlringen. Math. Z. 183 (1983), no. 2, 255–279.
- [KM97] S. Krstić und J. McCool. Free quotients of $SL_2(R[x])$. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 6, 1585–1588.
- [ML98] S. Mac Lane. Categories for the working mathematician. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Men79] E.R. Mendoza. Cohomology of PGL_2 over imaginary quadratic integers. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 1979. Bonner Mathematische Schriften 128. Universität Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, 1979. vi+83 pp.
- [Mil92] C.F. Miller III. Decision problems for groups—survey and reflections. Algorithms and classification in combinatorial group theory (Berkeley, CA, 1989), 1–59, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 23, Springer, New York, 1992.
- [Ser80] J.-P. Serre. Trees. Springer, 1980.
- [Sta91] J.R. Stallings. Non-positively curved triangles of groups. In: Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), 491–503, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.