"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2013 — Übungsblatt 2

Ausgabe: 25.04.2013, **Abgabe:** 02.05.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Bestimmen Sie, ob die folgenden Moduln frei sind (mit Begründung). Geben Sie ggfl. eine Basis an.

1. Der $\mathbb{Z}$-Modul

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3 \;\middle|\; 3 \cdot x + 4 \cdot y + 5 \cdot z = 0 \right\}$$

2. Der $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$-Modul

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^2 \;\middle|\; (1 + \sqrt{-5}) \cdot x - 2 \cdot y = 0 \right\}$$

Hinweis zu 2. auf der Rückseite. Versuchen Sie es zunächst ohne!

(4 Punkte)

Aufgabe 2.2: Sei M der $\mathbb{Z}$-Modul aus Aufgabe 2.1. Beweisen Sie $\mathbb{Z}^3/M \cong \mathbb{Z}$ indem Sie den Homomorphiesatz benutzen.

(2 Punkte)

Aufgabe 2.3: Sei A ein Ring, M ein A-Modul, und $N_1, N_2 \subseteq M$ Untermoduln von M. Zeigen Sie: Wenn M/N_1 und M/N_2 noethersche Moduln sind, dann ist auch $M/(N_1 \cap N_2)$ noethersch.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 2.4: In der Vorlesung werden wir sehen, dass $R = k[X, Y]$ (Polynomring in 2 Variablen) noethersch ist. Zeigen Sie jedoch, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$, das Ideal

$$(X, Y)^N = \{p \in k[X, Y] \mid \text{alle Monome in } p \text{ haben Grad} \geq N\}$$

nicht durch $< N + 1$ Elemente erzeugt werden kann.

(6 Punkte)

Hinweis zu Aufgabe 2.1, 2.:
Zunächst ist nach Definition $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{\alpha + \beta\sqrt{-5} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$.
Die Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{-5} \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{-5} \end{pmatrix}$$

liegen beide in M. *Nehmen Sie an, dass sie gemeinsames Vielfaches eines Elementes von* M *sind und untersuchen Sie Implikationen für* $|x|^2$ *(komplexer Absolutbetrag der* x*-Koordinate).*