

**“Kommutative Algebra und  
Einführung in die algebraische Geometrie”  
SS 2013 — Übungsblatt 6  
Ausgabe: 31.05.2013, Abgabe: 06.06.2013**

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html>

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

**Aufgabe 6.1:** Sei  $V \subset \mathbb{A}_k^2$  die affine Varietät, welche durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  beschrieben wird. Sei  $f$  die auf  $U_1 = V \setminus \{(1, 0), (0, 1)\}$  definierte Funktion  $\frac{xy}{x+y-1}$ . Sei  $g$  die auf  $U_2 = V \setminus \{(-1, 0), (0, -1)\}$  definierte Funktion  $\frac{(x+1)(y+1)}{x+y+1}$ .

1. Beweisen Sie, dass für  $P \in U_1 \cap U_2$  die Gleichung

$$f(P) = g(P)$$

erfüllt ist.

2. Nach Definition ist also die Funktion

$$h(P) := \begin{cases} f(P) & P \in U_1, \\ g(P) & P \in U_2, \end{cases}$$

lokal algebraisch auf  $V = U_1 \cup U_2$ . Aus Satz 4.17 folgt daher, dass

$$h \in k[V] = k[x, y]/(x^2 + y^2 - 1).$$

Finden Sie ein repräsentierendes Polynom.

(4 Punkte)

**Aufgabe 6.2:** Sei  $V \subset \mathbb{A}_k^n$  eine irreduzible affine Varietät und  $\wp$  das zugehörige Primideal. Wir haben gesehen, dass  $R = S_\wp^{-1}k[x_1, \dots, x_n]$  lokal ist, mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m} = S_\wp^{-1}\wp$ . Der Quotient ist also ein Körper. Beweisen Sie:

$$R/\mathfrak{m} = k(V).$$

(4 Punkte)

(bitte wenden)

**Aufgabe 6.3:** Sei  $A$  ein kommutativer Ring,  $S \subset A$  multiplikativ. Beweisen Sie: Die Abbildung  $I \mapsto S^{-1}I$  induziert eine Bijektion

$$\{\text{Primideale von } A \text{ mit } S \cap I = \emptyset\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Primideale von } S^{-1}A\}.$$

Gilt dieselbe Aussage auch mit “echte Ideale”, bzw. “maximale Ideale” statt “Primideale” (mit Beweis/Gegenbeispiel)?

(4 Punkte)

**Aufgabe 6.4:** Sei  $V$  eine algebraische Varietät,  $f \in k[V]$ . Konstruieren Sie eine *natürliche* Bijektion (mit Beweis):

$$U_f \xrightarrow{\sim} \{ \text{maximale Ideale in } S_f^{-1}k[V] \}.$$

*Zusatz (ohne Beweis): In Satz 4.17 werden wir sehen, dass  $S_f^{-1}k[V]$  gleich dem vorher bereits definierten Ring  $\mathcal{O}(U_f)$  ist. Gilt die Aussage*

$$U \xrightarrow{\sim} \{ \text{maximale Ideale in } \mathcal{O}(U) \}.$$

*(bzgl. einer natürlichen Abbildung) für beliebige offene Mengen  $U \subset V$ , die nicht notwendigerweise standard-offen sind?*

(4 Punkte)