“Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie” SS 2013 — Übungsblatt 8

Ausgabe: 13.06.2013, **Abgabe:** 20.06.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 8.1: Im affinen Koordinatenring $R = k[X_0, \ldots, X_n]$ definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$[1]

$$R_n := \{f \in R \mid f \text{ homogen vom Grad } n\}.$$

1. Zeigen Sie:

   (a) $R = \bigoplus_n R_n$,

   (b) $R_n \cdot R_m \subset R_{n+m}$.

   Ein Paar $(R, \{R_n\}_n)$ aus einem Ring R und Abelschen Untergruppen $R_n \subset R$ mit (a) und (b) nennt man einen **graduierten** Ring.

2. Sei R ein graduierter Ring. Ein Ideal $I \subset R$ heißt **homogen**, wenn es von homogenen Elementen (d.h. hier: von Elementen aus den R_n) erzeugt wird. Beweisen Sie: Falls I homogen ist, so ist R/I in natürlicher Weise ein graduierter Ring.

3. Folgern Sie: Homogene Koordinatenringe von projektiven Varietäten sind in natürlicher Weise graduiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2: Sei $V \subset \mathbb{P}^n_k$ eine projektive Varietät und $I \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ das dazugehörige homogene Ideal. Beweisen Sie den Hilbertschen Nullstellensatz für projektive Varietäten: Es gibt eine 1:1 Korrespondenz zwischen homogenen Radikalidealen $J \subset k[X_0, \ldots, X_n]/I$ (homogen im Sinne der Graduierung von Aufgabe 8.1 - 3.), die im Ideal $(X_0, \ldots, X_n)$ enthalten sind und projektiven Untervarietäten $W \subset V$.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

[1] die 0 wird als homogen von beliebigem Grad bezeichnet

Aufgabe 8.3: Zeigen Sie, daß es einen Isomorphismus von projektiven Varietäten

$$V(X^2 + Y^2 - Z^2) \to \mathbb{P}^1$$

gibt. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Stereographische Projektion vom Punkt $(0, 1)$ liefert eine Abbildung

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \setminus \{(0, 1)\} \to V(Y).$$

Geben Sie die Abbildungsvorschrift an.

(ii) Zeigen Sie, daß dies einen Isomorphismus von affinen Varietäten induziert.

(iii) Zeigen Sie, daß diese Abbildung zu einer Abbildung

$$V(X^2 + Y^2 - Z^2) \to \mathbb{P}^1$$

fortgesetzt werden kann. Zeigen Sie, daß diese Abbildung ein Isomorphismus ist.

(iv) Erklären Sie, wie diese Konstruktion die Erzeugerformel für pythagoreische Tripel liefert: Alle pythagoreischen Tripel (a,b,c) mit $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, c) = \mathrm{ggT}(b, c) = 1$ sind von der Form $(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$ für ganze Zahlen m, n.

(8 Punkte)