"Algebraische Zahlentheorie"
SS 2014 — Übungsblatt 7

Ausgabe: 24.06.14, **Abgabe:** 1.07.14

Aufgabe 7.1: Sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal eines Zahlkörpers K und $\mathfrak{a}^m = (a)$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ in $L = K(\sqrt[m]{a})$ zu einem Hauptideal wird in dem Sinne, dass $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L = (\alpha)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei $d > 0$ eine quadratfreie natürliche Zahl. Die Gleichung

$$x^2 - dy^2 = 1$$

heißt *Pellsche Gleichung*.

1. Zeigen Sie, dass diese Gleichung unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen hat.

2. Sei $d = 11$. Bestimmen Sie eine Lösung der Pellschen Gleichung, indem Sie den Beweis explizit machen.

(8 Punkte)

Bonus-Aufgabe 7.3: Formulieren Sie das Lösungsverfahren für die Pellsche Gleichung mittels Kettenbrüchen (mit Quellenangabe). Wenden Sie das Verfahren für $d = 11$ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 7.4: Sei $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass das Bild einer Einheit eine Einheit ist. Wie steht es mit den Urbildern? Sei zusätzlich R lokal mit maximalem Ideal m, $S = R/m$ und ϕ die Restklassenabbildung. Was können Sie nun sagen?

(4 Punkte)