"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2014 — Übungsblatt 9

Ausgabe: 04.07.2014, **Abgabe:** 11.07.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss14/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: Beweisen Sie (siehe Lemma 2.7.6):
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Köper und $k \to R$ eine *endliche* Ringerweiterung. Dann gilt:

1. Falls R reduziert ist, so gilt $R \cong \bigoplus_{j=1}^{n} k$ (k-Algebrenisomorphismus).
2. R hat nur endlich viele maximale Ideale.

(6 Punkte)

Aufgabe 9.2: Sei C eine irreduzible affine Varietät und $\varphi : C \to \mathbb{A}^1$ eine endlicher, surjektiver Morphismus. Beweisen Sie: $\mathcal{O}(C)$ ist in natürlicher Weise ein endlich-erzeugter freier $k[x]$-Modul.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.3: Sei R ein kommutativer Ring und I, J Ideale von R. Beweisen Sie, dass es eine exakte Sequenz von R-Moduln gibt:

$$0 \longrightarrow I \cap J \longrightarrow R \longrightarrow R/I \oplus R/J \longrightarrow R/(I+J) \longrightarrow 0.$$

Insbesondere gilt der "chinesische Restsatz"

$$R/(I \cap J) \cong R/I \oplus R/J,$$

falls $I + J = R$.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.4: Sei $k = \mathbb{C}$ und sei $V = V(X^2Y^2Z^2 - X^4YZ + 1) \subset \mathbb{A}_k^3$. Geben Sie explizit einen *endlichen* Morphismus von affinen Varietäten

$$V \to \mathbb{A}_k^2$$

an.

(4 Punkte)