Mathematisches Institut, Arithmetische Geometrie, Prof. Dr. Annette Huber–Klawitter

Probeklausur: "Analysis II" SS 2015

Datum und Uhrzeit: –
Prüfungsdauer: 3 Stunden
Raum: –
Erlaubte Hilfsmittel: 1 handbeschriebenes DIN A4 Blatt
Prüfer: Prof. Dr. Annette Huber–Klawitter

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Fach: ....

Studiengang: ☐ Bachelor ☐ Master ☐ Lehramt ☐ sonstiges

Unterschrift: ....

Anmerkungen:

- Füllen Sie dieses Deckblatt vollständig aus.
- Zusätzliche Blätter sind nur einseitig zu beschreiben.
- Zusätzliche Blätter sind mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten.**

Prüfungsunfähigkeit

Durch den Antritt dieser Prüfung erklären Sie sich für prüfungsfähig. Sollten Sie sich während der Prüfung nicht prüfungsfähig fühlen, können Sie aus gesundheitlichen Gründen auch während der Prüfung von dieser zurücktreten. Gemäß der Prüfungsordnungen sind Sie verpflichtet, die für den Rücktritt oder das Versäumnis geltend gemachten Gründe unverzüglich (innerhalb von 3 Tagen) dem Prüfungsamt durch ein Attest mit der Angabe der Symptome schriftlich anzuzeigen und glaubhaft zu machen. Weiter Informationen hierzu können auf den Internetseiten des Prüfungsamtes nachgelesen werden.

	Max. Anzahl Punkte	Erreichte Punkte	Bemerkung
Aufgabe 1	–		
Aufgabe 2	–		
Aufgabe 3	–		
Aufgabe 4	–		
Aufgabe 5	–		
Aufgabe 6	–		
Aufgabe 7	–		
Summe:	**40**		

Note: ....

Klausur eingesehen am: ....

Unterschrift des Prüfers: ....

Aufgabe 1:
Formulieren Sie den Fixpunktsatz von Banach:

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein und geben Sie nur eine knappe Begründung, z.B. ein Gegenbeispiel (ein oder zwei Sätze; kein vollständiges Argument!).

1. Sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der reellen Norm ein kompakter metrischer Raum?

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion mit der Hesse-Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
an dem Punkt $x = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Hat dann f bei x notwendigerweise ein isoliertes Maximum/Minimum oder kann man dazu keine allgemeine Aussage machen?

3. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Ist jede stetige Funktion $g : A \to \mathbb{R}$ dann automatisch nach unten beschränkt?

4. Ist jede stetige und total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auch partiell differenzierbar?

5. Kann das Vektorfeld
$$(x,y) \mapsto (x^3y + 4y^2, 0)$$
im $\mathbb{R}^2$ das Gradientenvektorfeld einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sein?

6. Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Wir betrachten die Differentialgleichung
$$y'(t) = Ay(t)$$
für eine (noch zu findende) differenzierbare Funktion $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Ist y, falls es existiert, stets eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2:
An welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{8(x^4+y^2)} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. stetig?
2. partiell differenzierbar? Geben Sie in diesem Fall auch die partiellen Ableitungen an, wo immer sie existieren.

Aufgabe 3:
Sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f_a : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & a^2x^2 - ay^2 \end{array}$$

1. Berechnen Sie den Gradienten von f.
2. Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f.
3. Bestimmen Sie die isolierten Minima und isolierten Maxima von f, sofern sie existieren.
4. Ist die Funktion f_a nach unten oder oben beschränkt? Falls ja, geben Sie das Infimum bzw. Supremum an.

Aufgabe 4:
Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x^4 + y^2, x^4 - y^2). \end{aligned}$$

1. Ist die Abbildung total differenzierbar? Wenn ja, berechnen Sie die Ableitung.
2. An welchen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt f die Voraussetzungen des Satzes über inverse Funktionen?
3. Prüfen Sie an allen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ob f dort auf einer hinreichend kleinen offenen Umgebung $U \ni (x, y)$ injektiv ist.

Aufgabe 5:
Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto (x^2-y)e^{-x-2y}. \end{aligned}$$

1. Berechnen Sie die totale Ableitung von f.
2. An welchen Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\operatorname{grad}(f) = 0$?
3. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass

$$X_\lambda := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \lambda\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist? (Sie müssen nicht prüfen, was an den anderen Werten für λ passiert)

Aufgabe 6:
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) = ty(t)^2.$$

1. Wie heißt der Typ dieser Differentialgleichung?
2. Lösen Sie die Differentialgleichung.

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$\begin{aligned} f : S^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{1}{2}x + y + 18z, \end{aligned}$$

die auf der Kugeloberfläche $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ definiert ist. Berechnen Sie den kleinsten und den größten Wert, den f auf S^2 annimmt – oder ist f unbeschränkt?

Aufgabe 8:
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und X kompakt. Sei weiter $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $C_f \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x, x' \in X$ die Ungleichung

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq C_f$$

gilt.