Übungen zur Vorlesung "Analysis II"
SS15 Blatt 1

Ausgabe: 20.04.2015, **Abgabe:** 27.04.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass aus

$$\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$$

folgt, dass $f(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.2: Beweisen Sie, dass es eine Zahl $C > 0$ gibt, sodass die folgende Aussage stimmt: Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass die Reihe

$$A := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

konvergiert, gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{a_k}{k}\right| \leq C \cdot \sqrt{A}$$

und insbesondere konvergiert die Reihe auf der linken Ungleichungsseite. Beachten Sie, dass die Zahl C *nicht* von der Folge abhängen darf!
(Tipp: Nutzen Sie die Cauchy-Schwarz'sche oder Hölder'sche Ungleichung aus der Analysis I Vorlesung)

(6 Punkte)

Aufgabe 1.3: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin(x)}{|x|}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert von f und der Ableitung f' bei $x = 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.4: Wir wissen bereits, dass wir die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren können, wobei die Basis durch

$$1_{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

gegeben ist, d.h. für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ sind ihre Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ gerade $(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z)$, d.h. Realteil und Imaginärteil. Der *Winkel* zwischen zwei Vektoren $0 \neq v, w \in \mathbb{R}^2$ ist definiert als

$$\arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|_2 \cdot \|w\|_2}\right),$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die 2-Norm und $\langle -, -\rangle$ das übliche Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ ist (entsprechend der Vorlesungen über Lineare Algebra I oder Analysis I).

1. Beweisen Sie, dass der Winkel wohldefiniert ist, d.h. dass stets $-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|_2 \cdot \|w\|_2} \leq +1$ gilt.

2. Interpretieren Sie die komplexe Zahl $e^{i\varphi}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ als Vektor im $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie den Winkel zu den Basisvektoren aus (1).

3. Sei $v \neq 0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Winkel zwischen v und $-v$.

(wir bemerken, dass wir eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auch als eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen könnten. Die Betrachtung solcher Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ wird ein Kernpunkt der Analysis II Vorlesung sein)

(5 Punkte)