Übungen zur Vorlesung "Analysis II"
SS15 Blatt 9

Ausgabe: 22.6.2015, **Abgabe:** 29.6.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: Bestimmen Sie das größtmögliche Volumen eines Quaders mit vorgegebener fester Oberfläche $A > 0$.

(Dies stimmt mit Aufgabe 7.1 überein). Verwenden Sie diesmal allerdings den Formalismus der Extrema mit Nebenbedingungen, d.h. die Methode der Lagrange Multiplikatoren, Satz 13.8.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xye^{-x-y}. \end{aligned}$$

Sei nun $c \in \mathbb{R}$ gegeben und definiere

$$X_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \mid f(x, y) = c\}.$$

1. In welchen Teilmengen $U := (x_0, x_1) \times (y_0, y_1) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ lässt sich $X_c \cap U$ in der Form
$$X_c \cap U = \{(x, g(x)) \mid x \in (x_0, x_1)\}$$
für eine geeignete Funktion $g : (x_0, x_1) \to \mathbb{R}$ darstellen?

2. Für welche Teilmengen U analog in der Form
$$X_c \cap U = \{(h(y), y) \mid y \in (y_0, y_1)\}$$
für geeignetes $h : (y_0, y_1) \to \mathbb{R}$.

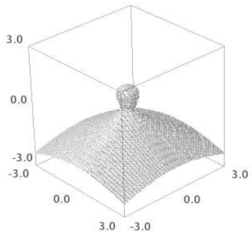
3. Welche X_c sind Mannigfaltigkeiten?

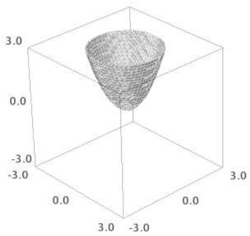
(5 Punkte)

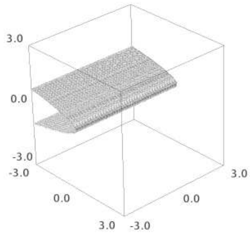
Aufgabe 9.3: Wir betrachten die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0\} \\ M_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z^2 = 0\} \\ M_3(c) &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - (1-z)z^2 = c\} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass M_1, M_2 und $M_3(c)$ für $c > 0$ zwei-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind; genauer genommen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Abbildungen gehört zu welcher Mannigfaltigkeit?







2. Besitzt $M_3(0) \setminus \{(0,0,0)\}$ die Struktur einer Mannigfaltigkeit?

3. Ist die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

4. Sei
$$W := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}.$$
Die Menge W ist ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass W *nicht* die Struktur einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit besitzen kann. (Tipp: Zusammenhängende Mengen wie auf Übungsblatt 4 sind hier hilfreich. Betrachten Sie $W \setminus \{(0,0)\}$)

(6 Punkte)

Aufgabe 9.4: Wir betrachten auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim x' :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z},$$

d.h. zwei reelle Zahlen sind äquivalent, wenn sie sich um eine Ganzzahl unterscheiden. Sei $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ die Quotientenabbildung, die x auf seine Äquivalenzklasse $[x]$ abbildet.

1. Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}/\sim$ offen falls ihr Urbild $q^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}$ ist. Dies ist eine Topologie auf $\mathbb{R}/\sim$. Folgern Sie, dass q stetig ist.

2. Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $q\mid_{B(x,\varepsilon)} : B(x,\varepsilon) \to q(B(x,\varepsilon))$ ein Homöomorphismus ist.

3. Zeigen Sie, dass solche inversen Abbildungen $(q\mid_{B(x,\varepsilon)})^{-1}$ als Karten verwendet werden können, um $\mathbb{R}/\sim$ zu einer Mannigfaltigkeit zu machen.

4. Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}/\sim$ und $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ diffeomorphe Mannigfaltigkeiten sind.

(5 Punkte)