Übungen zur Vorlesung "Analysis II"
SS15 Blatt 10

Ausgabe: 29.6.2015, **Abgabe:** 6.7.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 10.1: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y,t) &\longmapsto \sqrt{y+t} \end{aligned}$$

Prüfen Sie, für welche reelle Zahlen $0 < a < b$ die Funktion f auf $(a,b) \times (a,b)$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt und geben Sie eine konkrete Lipschitz-Konstante $L_{a,b}$ an. Erfüllt die Funktion auf ganz $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Lipschitz-Bedingung?

(4 Punkte)

Aufgabe 10.2: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &:= \cos(y(t)) \\ y(0) &:= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

1. Formulieren Sie das Problem als Fixpunktproblem
$$\begin{aligned} F : C([0,t_1]) &\longrightarrow C([0,t_1]) \\ F(y) &= y \end{aligned}$$
um. Der Beweis des Satzes on Picard-Lindelöf, Theorem 14.4, mag dazu als Anregung dienen.

2. Zeigen Sie, dass es ein Intervall $[0,t_1]$ mit $t_1 > 0$ gibt, in dem dieses Problem eine eindeutige Lösung $y : [0,t_1] \to \mathbb{R}$ besitzt. Versuchen Sie Ihre Konstruktion dahingehend zu optimieren, ein möglichst großes t_1 zu erreichen.

3. Folgern Sie, dass für $y_0(t) := \frac{1}{2}$ die Folge $y_n := F(y_{n-1})$ gegen die eindeutige Lösung konvergiert. Berechnen Sie y_1, y_2 – wenn Sie mögen, gerne mehr.

4. Schätzen Sie ab, wie groß wir t wählen können, sodass in $[0,t]$ sicher $\|y_2 - y\|_\infty \leq \frac{1}{100}$ gilt, wobei y die eindeutige Lösung des Systems (1) bezeichnet.

(6 Punkte)

Aufgabe 10.3: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) + ty(t) - e^{-t}y(t)^2 = 0.$$

1. Prüfen Sie die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen bei $t = 0$ mit dem Satz von Picard-Lindelöf.
2. Es gibt eine große Vielfalt an Standardtypen von Differentialgleichungen und wir würden niemals die Zeit finden, diese Typen alle abzudecken. Ähnlich wie für komplizierte Integrale schlägt man daher in der Praxis manchmal in Sammelwerken nach, ob es für gewisse Gleichungen Standardlösungsmethoden gibt.

   Identifizieren Sie den Typ der vorliegenden Differentialgleichung. Denkbare Quellen wären beispielsweise Fachbücher, oder auch das Internet. Geben Sie die von Ihnen verwendete Quelle an!
3. Lösen Sie die Differentialgleichung. Die meisten Quellen erklären auch, wie man vorgehen muss. Geben Sie die von Ihnen verwendete Quelle an! Erklären Sie Ihre Rechnung detailliert!

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.4: Sei nun $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren

$$\begin{aligned} g_h : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y,t) &\longmapsto \int_0^t h(x)\sin(xy)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Schätzen Sie $|g_h(y_1,t) - g_h(y_2,t)|$ günstig nach oben ab, um zu zeigen, dass g_h für $h(x) := \frac{1}{1+x^3}$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt und geben Sie eine konkrete Lipschitz-Konstante an.

(4 Punkte)