Übungen zur Vorlesung "Analysis II"
SS15 Blatt 11

Ausgabe: 6.7.2015, **Abgabe:** 13.7.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 11.1: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'(t) = -y(t)^3\sqrt{t}$$

für $t > 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.2: Lösen Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = ty(t) + e^{\frac{t^2}{2}}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 11.3: Wir betrachten die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$4h''(t) - h(t) = 0. \tag{1}$$

1. Können Sie eine Lösung raten? Die Funktion $h(t) := 0$ ist offensichtlich eine Lösung. Gibt es auch andere Lösungen? Versuchen Sie eine Lösung zu raten.
2. Formulieren Sie unser Problem als äquivalente Differentialgleichung 1. Ordnung um, sodass es die Form $y' = f(x, y)$ für ein $\mathbb{R}^2$-wertiges y annimmt.
3. Zeigen Sie, dass es für vorgegebene Werte $h(0) = a$ und $h'(0) = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung von Gleichung (1) gibt.
4. Zeigen Sie, dass die Menge aller Lösungen von Gleichung (1) ein reeller Vektorraum der Dimension 2 ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 11.4: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Die Gleichung

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + n(n + 1)f(x) = 0$$

heißt *Legendre-Gleichung.*

1. Lösen Sie die Differentialgleichung mit dem Potenzreihenansatz

$$f_n(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

   Zeigen Sie, dass die von Ihnen gefundenen Potenzreihen für $|x| < 1$ konvergieren.

2. Zeigen Sie, dass die Menge aller Lösungen auf $(-1, 1)$ ein 2-dimensionaler Vektorraum ist.

3. Zeigen Sie, dass es für jedes n einen 1-dimensionalen Untervektorraum gibt von Lösungen, die zugleich Polynome sind.

(5 Punkte)