Übungen zur Vorlesung “Analysis II”
SS15 Blatt 12

Ausgabe: 13.7.2015, **Abgabe:** 20.7.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 12.1: Seien $f : I \to M_{l\times m}(\mathbb{R})$ und $g : I \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ matrixwertige differenzierbare Funktionen. Dann ist $f \cdot g : I \to M_{l\times n}(\mathbb{R})$ bezüglich der Matrizenmultiplikation.

1. Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ differenzierbar ist und die Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

   gilt.

2. Falls f nur invertierbare Matrizen als Werte annimmt, folgern Sie eine Formel für die Ableitung von $h(t) := f(t)^{-1}$, d.h. der Funktion, die punktweise die inverse Matrix als Wert besitzt.

Beachten Sie, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.2: Lösen Sie die exakte Differentialgleichung

$$(3x^2 + y) + (x + 2y)y' = 0.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 12.3: Wir wollen die lineare Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t.$$

lösen.

1. Lösen Sie dazu zunächst das zugehörige homogene Problem:

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y.$$

   Bestimmen Sie eine Basis von Fundamentallösungen und geben Sie die Fundamentalmatrix an.

2. Nutzen Sie dann Variation der Konstanten, um das inhomogene Originalproblem zu lösen.

(8 Punkte)

Aufgabe 12.4: Lösen Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y'''(t) - y(t) + \sin(t) = 0,$$

indem Sie

1. die Differentialgleichung in ein äquivalentes System inhomogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung überführen;
2. die Lösungen für das homogene System als Matrixexponentialfunktion e^{tA} schreiben;
3. und einen geeigneten Koordinatenwechsel S finden, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Es genügt, wenn Sie die Lösung in der Form $S(\ldots)S^{-1}c \cdot u$ angeben. Das sonst noch folgende Ausmultiplizieren dieses Ausdrucks, sowie auch das Ausrechnen der Integrale bei der Variation der Konstanten ersparen wir uns. Geben Sie lediglich die auszurechnenden Ausdrücke an.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 12.5: In der ersten Aufgabe haben wir eine Art nicht-kommutative Produktregel kennengelernt. Formulieren und beweisen Sie eine analoge Quotientenregel für matrixwertige Funktionen.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 12.6: Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Geben Sie die Fundamentalmatrix an.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 12.7: Wir wollen auf einem Stück Draht endlicher Länge n geladene Teilchen platzieren, die sich gegenseitig abstoßen. Wir modellieren dies so: Auf dem Intervall $[-1, 1]$ platzieren wir $n \geq 3$ Punkte, von denen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit fortan

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \tag{1}$$

annehmen können. Wir definieren das Potential

$$P(\underline{x}) := P(x_1, \ldots, x_n) := 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \log |x_i - x_j| \,.$$

Diese Funktion ist definiert für alle $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sofern $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$. Die Teilchen bewegen sich dann gerade entlang der Vektoren (Kraft) $F := -\mathrm{grad} P$, d.h. sie ordnen sich so an, dass die Funktion $P(x_1, \ldots, x_n)$ ein lokales Minimum annimmt. Wir wollen dieses Minimum bestimmen.

1. Sei bei $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Minimum. Zeigen Sie, dass für alle $2 \le k \le n-1$ die Gleichung
$$\frac{\partial P}{\partial x_k} = 2 \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq k}} \frac{1}{x_k - x_i} = 0$$
gelten muss. Wieso muss dies nicht notwendigerweise auch für $k = 1$ oder $k = n$ gelten? Zeigen Sie, dass die Gleichung auch für $k = 1$ gilt, falls $x_1 > -1$ und auch für $k = n$ gilt, falls $x_n < 1$.

2. Wir definieren
$$f(z) := (z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_n) \qquad \text{und} \qquad f_k(z) := \frac{f(z)}{z - x_k}.$$
Zeigen Sie, dass
$$\frac{f_k'(z)}{f_k(z)} = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq k}} \frac{1}{z - x_i}$$
gilt.

3. Folgern Sie, dass
$$f''(x_k) = 2 f_k'(x_k) = 0$$
für alle $2 \le k \le n-1$ gilt. Wie viele Nullstellen kann f'' höchstens besitzen? Folgern Sie, dass $x_1 = -1$ und $x_n = +1$.

4. Folgern Sie, dass sowohl $(z^2 - 1) f''(z)$ als auch $f(z)$ bei den n Stellen $z = x_1, \ldots, x_n$ Nullstellen haben. Folgern Sie daraus, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit
$$(z^2 - 1) f''(z) = C \cdot f(z). \tag{2}$$

5. Zeigen Sie, dass $C = n(n-1)$, indem Sie den Koeffizienten von z^n auf beiden Gleichungsseiten vergleichen.

6. Lösen Sie die Differentialgleichung mit der Potenzreihenmethode. Nutzen Sie, dass wir wissen, dass f ein Polynom sein muss.

7. Bestimmen Sie, wie sich vier Teilchen auf dem Draht anordnen würden (d.h. mathematisch: Bestimmen Sie das Minimum für $n = 4$).

(10 Punkte)