# Übungen zur Vorlesung “Analysis II”
# SS15 Blatt 2

**Ausgabe:** 27.4.2015, **Abgabe:** 4.5.2015

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

**Aufgabe 2.1:** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $c > 0$. Wir definieren für $x, y \in X$

$$d_c(x, y) := \begin{cases} d(x, y) & \text{falls } d(x, y) < c \\ c & \text{falls } d(x, y) \geq c. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $d_c$ eine Metrik auf $X$ definiert. Beweisen Sie, dass die Identität von $(X, d)$ nach $(X, d_c)$ eine stetige Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion ist.

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.2:** Prüfen Sie, mit ausführlicher Begründung, welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ stetig sind:

1. $$f(x, y) := \left( \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

2. $$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) := (r, \varphi),$$

wobei wir nutzen, dass jedes Element in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in eindeutiger Weise mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ geschrieben werden kann (Polarkoordinaten, siehe Analysis I).[1]

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.3:** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge der reellen Zahlen. Sei weiter $C(\Omega)$ die Menge der beschränkten stetigen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die Supremums-Norm (siehe auch Skript)

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| . \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, dass $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum ist.

[1] Wer möchte, darf diese Teilaufgabe auch in komplexer Notation bearbeiten, d.h. wir identifizieren $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und schreiben $f(re^{i\varphi}) := (r, \varphi)$.

2. Zeigen Sie, dass der Raum $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist.

3. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

für $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_n$ differenzierbar sind. Folgern Sie, dass der Untervektorraum $C_{\text{diff}}([-1,1]) \subset C([-1,1])$ der differenzierbaren Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *nicht* vollständig ist.

(6 Punkte)

**Aufgabe 2.4:** Auf den reellen Zahlen definieren wir

$$d'(x,y) := |\arctan x - \arctan y| \,.$$

1. Zeigen Sie, dass $d'$ eine Metrik ist.

2. Zeigen Sie, dass die Identität $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{R}, d')$ induziert, ebenso umgekehrt. Folgern Sie, dass eine Menge in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ offen ist dann und nur dann, wenn sie in $(\mathbb{R}, d')$ offen ist.

3. Folgern Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ konvergiert dann und nur dann, wenn sie in $(\mathbb{R}, d')$ konvergiert.

4. Zeigen Sie, dass die Folge $a_n := n$ in $(\mathbb{R}, d')$ eine Cauchy-Folge ist. Folgern Sie, dass $(\mathbb{R}, d')$ *nicht* vollständig ist.

Wir lernen hier, dass die reellen Zahlen, hätten wir in Analysis I die Metrik $d'$ benutzt, zum völlig gleichen Begriff konvergenter Folgen geführt hätte, wir aber einen weitaus weniger nützlichen Begriff von Cauchy-Folgen bekommen hätten.

(6 Punkte)