Übungen zur Vorlesung "Analysis II"
SS15 Blatt 3

Ausgabe: 4.5.2015, **Abgabe:** 11.5.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Wir betrachten den Ball $B(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p < 1\}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$. Fertigen Sie Skizzen an, die diese Menge in der Ebene $\mathbb{R}^2$ darstellen für die Fälle $p = 1, 2, 5, \infty$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

1. Beweisen Sie, dass $(A, d\,|_{A\times A})$ ebenfalls ein metrischer Raum ist.
2. Beweisen Sie, dass A genau dann abgeschlossen ist wenn $(A, d\,|_{A\times A})$ vollständig ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 3.3: Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Sei zudem $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ eine Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen in X. Beweisen Sie, dass dann $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ebenfalls nichtleer ist. Zeigen Sie auch, dass diese Aussage in einem nichtkompakten Raum nicht stimmen muss.

(5 Punkte)

Aufgabe 3.4: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \det A, \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n\times n, \mathbb{R})$ die allgemeine lineare Gruppe der $(n\times n)$-Matrizen bezeichnet (siehe Lineare Algebra I). Versehen Sie den reellen Vektorraum $\mathrm{Mat}(n\times n, \mathbb{R})$ mit einer Norm Ihrer Wahl.

1. Zeigen Sie, dass die Determinante det eine stetige Abbildung ist.

2. Folgern Sie, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge ist.
3. Zeigen Sie, dass die $(n \times n)$-Matrizen mit Determinante null eine abgeschlossene Menge bilden. Ist diese Menge kompakt?

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 3.5: Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für $i = 1, 2$ topologische Räume. Die Menge $X_1 \times X_2$ hat *Projektionen* $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, definiert durch $p_i(x_1, x_2) := x_i$. Sei $\mathcal{S}$ die kleinste Menge von Teilmengen von $X_1 \times X_2$ sodass

1. $\mathcal{S}$ eine Topologie auf $X_1 \times X_2$ definiert, und zugleich
2. die Projektionen p_1 und p_2 beide stetig sind.

Wir bezeichnen $\mathcal{S}$ als die *Produkttopologie* auf $X_1 \times X_2$. Beweisen Sie, dass bezüglich der Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine Menge offen ist dann und nur dann wenn sie bezüglich einer Norm offen ist.

(5 Punkte)