Übungen zur Vorlesung “Analysis II”
SS15 Blatt 4

Ausgabe: 11.5.2015, **Abgabe:** 18.5.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Wir werden verschiedene metrische Räume X betrachten, gemeinsam mit einer offenen Überdeckung $(U_n)_n$. Geben Sie jeweils eine endliche Teilüberdeckung an − oder beweisen Sie, dass es keine solche gibt:

1. $X := \mathbb{R}$ und $U_n := (-n, +n)$ für $n \in \mathbb{N}$.
2. $X := [0, 1]$ und $U_{2n} := (\frac{1}{n+1}, 1)$, $U_{2n+1} := (1 - \frac{1}{6n}, 1]$, $U_1 := [0, \frac{1}{7})$ für $n \in \mathbb{N}$.
3. Sei $d \geq 1$ eine natürliche Zahl und $X := \overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^d$, der abgeschlossene Einheitsball im $\mathbb{R}^d$ in der $\|\cdot\|_2$-Norm. Die offenen Überdeckung $(U_n)_n$ bestehe aus allen offenen Mengen
$$\left\{ B(x, \frac{1}{8}) \cap X \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}^d \right\}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4.2:

1. Seien X ein kompakter metrischer Raum, Y ein beliebiger metrischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige Bijektion. Beweisen Sie, dass dann auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist.
2. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi) &\longrightarrow S^1 \\ \alpha &\longmapsto (\sin \alpha, \cos \alpha) \end{aligned}$$
mit $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ eine stetige Bijektion ist. Zeigen Sie, dass f^{-1} *nicht* stetig ist. Wieso widerspricht dies nicht dem Aufgabenteil (1)?

(5 Punkte)

Aufgabe 4.3: Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *zusammenhängend*, wenn für alle offenen Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ sodass

$$A_1 \cap A_2 \cap A = \varnothing \qquad \text{und} \qquad A \subseteq A_1 \cup A_2$$

gilt, auch wenigstens $A_1 \cap A = \varnothing$ oder $A_2 \cap A = \varnothing$ gilt.

1. Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass für jede zusammenhängende Teilmenge $A \subseteq X$ ihr Bild $f(A) \subseteq Y$ ebenfalls zusammenhängend ist.

2. **(Zwischenwertsatz, allgemeine Version)** Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass wenn f die Werte a, b (mit $a \leq b$) annimmt, dann f auch jeden Wert $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ annimmt.

3. Zeigen Sie, dass diese Aussage nicht stimmen muss, wenn wir nicht mehr fordern, dass X zusammenhängend sein soll.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.4: Zeigen Sie, dass für alle $a < b$ das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend ist. Folgern Sie die uns bekannte Formulierung des Zwischenwertsatzes aus Analysis I.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 4.5: Seien X und Y topologische Räume. Zeigen Sie, dass $X \times Y$ mit der Produkttopologie (wie auf Übungsblatt 3 definiert) dann und nur dann kompakt ist wenn X und Y beide kompakt sind.

(7 Punkte)