Übungen zur Vorlesung "Analysis II"
SS15 Blatt 5

Ausgabe: 18.5.2015, **Abgabe:** 1.6.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x^2 - y^2 x, x \sin y + y, \frac{x}{1 + x^2 + y^2}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{für } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{für } x = 0 \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f in $(x, y) = (0, 0)$ total differenzierbar ist mit Ableitung null. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen von f nicht stetig sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.3: Sei $Mat(n, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen und I die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass die Ableitung von

$$\det : Mat(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

am Punkt $I \in Mat(n, \mathbb{R})$ gerade die Spur

$$\mathrm{tr} : Mat(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 5.4: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $f : U \to V$ eine bijektive, differenzierbare Abbildung.

1. Geben Sie ein Beispiel für eine solche Abbildung, sodass ein $u \in U$ existiert mit $Df(u) = 0$.
2. Zeigen Sie, dass falls die inverse Abbildung $f^{-1} : V \to U$ differenzierbar ist, $(Df^{-1})(f(u)) = ((Df)(u))^{-1}$ für alle $u \in U$ gilt.
3. Zeigen Sie, dass falls f^{-1} stetig ist und für alle $u \in U$ die Bedingung $\det Df(u) \neq 0$ gilt, dann auch f^{-1} differenzierbar ist.

(5 Punkte)