Übungen zur Vorlesung "Analysis II"
SS15 Blatt 6

Ausgabe: 26.5.2015, **Abgabe:** 8.6.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Achtung: Das Abgabedatum ist der 8.6. (d.h. *zwei* Wochen nach dem Ausgabedatum). Das Aufgabenblatt steht jetzt schon online, wenngleich evtl. einige Aufgaben erst mit dem nach der Pfingstwoche kommenden Stoff gut lösbar sind.

Aufgabe 6.1: Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit dem Gradientenvektorfeld

$$\operatorname{grad}(f_\lambda)(x, y, z) = \left(3x^2 - \lambda^3 xy + \lambda yz, -4x^2 + 3\lambda y^2 + 2xz, \lambda xy - 12z^2\right) ?$$

Beweisen Sie für gegebene $\lambda \in \mathbb{R}$ entweder, dass ein solches f_λ nicht existieren kann, oder konstruieren Sie eine mögliche Lösung f_λ. Falls f_λ existiert, ist es eindeutig bestimmt?

(8 Punkte)

Aufgabe 6.2: Wir betrachten für gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f_\lambda : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x^2 + \lambda y^2 + z^2 - \lambda(xy + z) + xz \end{array}$$

1. Berechnen Sie das Gradientenvektorfeld und die Hesse-Matrix von f_λ.
2. Bestimmen Sie die Nullstellen des Gradientenvektorfelds.
3. Bestimmen Sie den Rang der Hesse-Matrix (dies hängt von λ ab!).

(8 Punkte)

Aufgabe 6.3: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (y - x^2)(y - 3x^2). \end{array}$$

1. Zeigen Sie, dass die Funktion f differenzierbar ist.

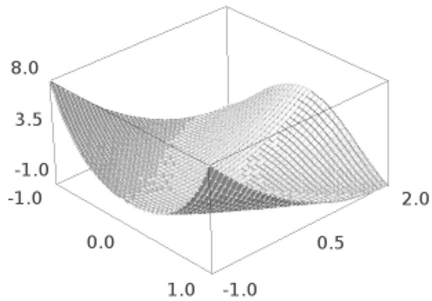
2. Zeigen Sie, dass die Funktion entlang jeder Gerade durch den Nullpunkt $(0,0)$ ein lokales Minimum bei $(0,0)$ besitzt. (Tipp: Betrachten Sie die Fälle $x \mapsto f(x,0)$, $x \mapsto f(0,x)$ und $x \mapsto f(x,mx)$ für $m > 0$ beliebig separat)

3. Zeigen Sie konkret, dass die Funktion f bei $(0,0)$ kein lokales Extremum besitzt. (Tipp: Betrachten Sie z.B. die Werte bei $(0,\varepsilon)$ und $(\varepsilon, 2\varepsilon^2)$ für $\varepsilon > 0$).

4. Bestimmen Sie das Gradientenvektorfeld von f, d.h. $\mathrm{grad}(f)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

5. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f, $\mathrm{Hess}(f)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie (erneut), dass $\mathrm{Hess}(f)(x)$ im Punkt $x = (0,0)$ Rang 1 besitzt.

(8 Punkte)



Aufgabe 6.4: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und zusammenhängende Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\mathrm{grad}(f)(x) = 0$ für alle $x \in U$.

1. Zeigen Sie, dass in einem hinreichend kleinen Ball um jeden Punkt $x \in U$ die Funktion f konstant sein muss.

2. Beweisen Sie, dass f dann eine konstante Funktion sein muss.

(Anmerkung: Den Begriff einer zusammenhängende Menge kennen wir von Blatt 4)

(5 Punkte)