Übungen zur Vorlesung “Analysis II”
SS15 Blatt 7

Ausgabe: 8.6.2015, **Abgabe:** 15.6.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Was ist das größtmögliche Volumen eines Quaders mit vorgegebener Oberfläche?

Präziser formuliert: Wir betrachten Quader mit den variablen Seitenlängen $a, b, c > 0$. Wenn wir die Oberfläche

$$A = 2ab + 2bc + 2ac$$

für einen festen Wert $A > 0$ fixieren, wird das Volumen $V(a, b, c) = abc$ eine Funktion in nur noch zwei Variablen, z.B. a und b. Bestimmen Sie das Maximum dieser Funktion. Fixieren wir stattdessen das Volumen, gibt es einen Quader mit größtmöglicher Oberfläche?

(5 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei nun $x \in U$ ein Punkt mit $\mathrm{grad}(f)(x) \neq 0$. Eine anschauliche Interpretation des Gradientenvektors $\mathrm{grad}(f)(x)$ ist, dass er stets in die Richtung “des steilsten Wachstums” der Funktion f deutet. Bringen Sie diesen Slogan in eine präzise Form und geben Sie einen Beweis. Als Anregung:

1. Betrachten Sie Wege $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t_0) = x$ und $\|\gamma'(t_0)\| = 1$. Interpretieren Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \gamma}$ als Skalarprodukt.
2. Für welchen Winkel zwischen $\gamma'(t_0)$ und $\mathrm{grad}(f)(x)$ nimmt die Richtungsableitung den größten Wert an?

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3:
Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y) \quad &:= \quad \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Wieso widerspricht diese Rechnung nicht dem Satz von Fubini aus der Vorlesung?

(4 Punkte)

Aufgabe 7.4: Aus der Analysis I wissen wir, dass

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dies hatten wir z. B. auf Übungsblatt 12 gezeigt, man kann es allerdings auch direkt nachrechnen. Sei nun $a > 0$ eine reelle Zahl.

1. Berechnen Sie (für $0 \leq s \leq t$)

   $$\int_s^t \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x.$$

   Für dies genügen die Methoden der Analysis I vollkommen.

2. Folgern Sie mit der Methode parameter-abhängiger Integrale die Formel

   $$\int_s^t \frac{-2a}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{a^2}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a\,(x^2+a^2)}\right]\Bigg|_s^t.$$

3. Folgern Sie daraus die schöne Formel

   $$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3}.$$

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 7.5: Man kann dieses Verfahren ausbauen, um die Integrale $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$ für beliebige natürliche Zahlen n berechnen zu können. Zeigen Sie z.B. mit dieser Methode, dass falls $a > 0$ die Formel

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x = \frac{3}{16}\frac{\pi}{a^5}$$

gilt.

(5 Punkte)