Übungen zur Vorlesung “Analysis II”
SS15 Blatt 8

Ausgabe: 15.6.2015, **Abgabe:** 22.6.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss15/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, z) &\longmapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z). \end{aligned}$$

1. Berechnen Sie die Ableitung Df.
2. Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *lokal invertierbar* im Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ falls es eine Umgebung U von p und eine Umgebung V von $g(p)$ gibt, sodass $g|_U : U \to V$ eine Bijektion ist. Bestimmen Sie an welchen Punkten f lokal invertierbar ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2: In der Analysis I haben wir die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kennengelernt. Über die Identifizierung $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, wollen wir die Exponentialfunktion als Abbildung $\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen.

1. Berechnen Sie die Ableitungsmatrix $D\exp$.
2. An welchen $z \in \mathbb{R}^2$ ist die Exponentialfunktion lokal invertierbar?
3. Geben Sie eine möglichst große offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ an, auf der $\exp|_U$ invertierbar ist. Können wir dafür $U = \mathbb{R}^2$ wählen?

(4 Punkte)

Aufgabe 8.3: *(Fixpunktsatz von Banach)* Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $F : X \to X$ eine Kontraktion, d.h. es gibt ein $\theta \in [0, 1)$ sodass für alle Punkte $a, b \in X$ die Ungleichung

$$d(F(a), F(b)) \leq \theta \cdot d(a, b)$$

gilt. Wir bezeichnen mit $x \in X$ den eindeutigen Fixpunkt $F(x) = x$.

1. Beweisen Sie, dass für $x_0 \in X$ und die Folge $x_n := F(x_{n-1})$ die Ungleichung
$$d(x_n, x) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1, x_0)$$
gilt.

2. Wir wollen eine Nullstelle des Polynoms
$$x^8 - 30x + 8 = 0$$
im Intervall $[0,1]$ finden. Bringen Sie dazu die Gleichung in die Form $F(x) = x$ mit $F : [0,1] \to [0,1]$ sodass der Fixpunktsatz verwendet werden kann. Folgern Sie, dass das Polynom in $[0,1]$ genau eine Nullstelle hat.

3. Berechnen Sie diese hinreichend genau, um mit Aufgabenteil (1) zu beweisen, dass Ihre Näherungslösung bis auf die erste Nachkommastelle korrekt ist.[1]

(6 Punkte)

Aufgabe 8.4: Wir wollen zeigen, dass es genau eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, die die Integralgleichung
$$f(x) = \int_0^1 f(t) \sin(xt) \mathrm{d}t + \frac{1}{10} \sin(8x) \tag{1}$$
löst. Wir folgen diesen Schritten:

1. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$ gilt.

2. Wir definieren eine Abbildung
$$\begin{aligned} F : C([0,1]) &\longrightarrow C([0,1]) \\ F(f)(x) &:= \int_0^1 f(t) \sin(xt) \mathrm{d}t + \frac{1}{10} \sin(8x), \end{aligned}$$
wobei $C([0,1])$ den vollständigen metrischen Raum der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet (siehe Aufgabe 2.3, Blatt 2). Zeigen Sie, dass aus $f \in C([0,1])$ auch $F(f) \in C([0,1])$ folgt.

3. Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0,1]$ die Ungleichung
$$\int_0^1 |\sin(xt)| \, \mathrm{d}t \leq 0.85$$
gilt (dafür dürfen Sie den Taschenrechner verwenden). Folgern Sie, dass F eine Kontraktion ist. Folgern Sie, dass die Gleichung (1) genau eine Lösung besitzt.

(7 Punkte)

[1] Die Verwendung eines Taschenrechners ist erlaubt, aber erklären Sie Ihre Rechenschritte und schreiben Sie nicht lediglich ein Endergebnis hin.

Im Prinzip könnten wir ähnlich wie in Aufgabe 8.3 nun auch ganz konkret diese Lösung annäherungsweise berechnen. Wir wollen dies nicht weiter verfolgen, da die Rechnung sehr aufwändig wird, aber ein Computer ermittelt für die ersten Annäherungen beispielsweise das Folgende: