“Algebraische Zahlentheorie”
SS 2016 — Übungsblatt 3

Ausgabe: 05.05.2016, **Abgabe:** 13.05.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/algzt.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Sei R ein Ring und $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in R$. Zeigen Sie die folgenden Gleichungen von Idealen:

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_m) = (a_i b_j \mid i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)\,,$$

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_m) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)\,.$$

Zeigen Sie für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \leq R$ die Gleichung von Idealen

$$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3.2: Für jede der folgenden Körpererweiterungen $L/\mathbb{Q}$, bestimmen Sie den Grad $\deg(L/\mathbb{Q})$, eine Basis für L als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und alle Einbettungen von L in einen algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. Zeigen Sie für jedes der $x_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ jeweils $x_i \in L$ und berechnen Sie Spur $Tr_{L/\mathbb{Q}}(x_i)$ und Norm $N_{L/\mathbb{Q}}(x_i)$.

1. $L = \mathbb{Q}\,(a)$ mit

$$\begin{aligned} x_0 &= \ a := \sqrt{2} + \sqrt{3}, \\ x_1 &= \ \sqrt{6}, \\ x_2 &= \ \sqrt{2}, \\ x_3 &= \ 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{3}\sqrt{3} + \tfrac{1}{6}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

2. $L = \mathbb{Q}\,(\zeta)$ mit

$$\begin{aligned} x_0 &= \ \zeta := e^{\frac{2\pi i}{5}}, \\ x_1 &= \ \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4, \\ x_2 &= \ \zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^4, \end{aligned}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3.3: Finden Sie in der Körpererweiterung $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-6}\right)$ über $\mathbb{Q}$ eine nicht-eindeutige Zerlegung ganzer Elemente in irreduzible, d.h. paarweise verschiedene ganze Elemente $a, b, c, d \in \mathcal{O}_K$ mit $ab = cd$.
Verfeinern Sie dies als eindeutige Zerlegung in Primideale.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 3.4: Sei R ein Hauptidealring.
Für jede Matrix $M \in \mathrm{Mat}^{n\times m}(R)$ mit Koeffizienten in R gibt es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{Mat}^{n\times n}(R)$ und $T \in \mathrm{Mat}^{m\times m}(R)$ sodass alle Einträge von $M' := SMT$ auf der Diagonalen liegen und die Diagonaleinträge $d_i := M'_{ii}$ für $i < r$ die Teilbarkeitsrelation $d_i | d_{i+1}$ und für $i > r$ stets $d_i = 0$ erfüllen, für ein festes $r \geq 0$ welches nur von M abhängt. Dies nennt man die *Smith-Normalform* von M.
Beweisen Sie, dass aus der Existenz der Smith-Normalform der *Struktursatz* für endlich erzeugte R-Moduln folgt. Dieser besagt, dass es für jeden endlich erzeugten R-Modul A endlich viele Elemente $\alpha_i \in R$ gibt, eindeutig bis auf Multiplikation mit Einheiten, sodass A isomorph zu $R^f \oplus \bigoplus_{i\in I} R/(\alpha_i)$ ist und die Ideale (α_i) in R Potenzen von Primidealen sind. Die Elemente α_i heißen *Elementarteiler* und die Zahl $f \geq 0$ heißt *Rang* von A. Sowohl der Struktursatz als auch die Smith-Normalform werden auch *Elementarteilersatz* genannt.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 3.5: Gegeben die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 20 & 22 & 10 & 46 \\ 44 & 58 & 22 & 130 \\ 16 & 20 & 8 & 44 \\ 24 & 24 & 12 & 48 \end{pmatrix}$$

definieren wir den $\mathbb{Z}$-Modul $A := \mathbb{Z}^4/M\mathbb{Z}^4$. Zerlegen Sie A wie im Struktursatz (siehe vorherige Aufgabe) in zyklische Moduln. Bestimmen Sie die Elementarteiler explizit.
Tipp: Suchen Sie in der Literatur einen Algorithmus zur Berechnung der Smith-Normalform.

(2 Punkte)