“Algebraische Zahlentheorie”
SS 2016 — Übungsblatt 5

Ausgabe: 26.05.2016, **Abgabe:** 03.06.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/algzt.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Sei $f(X) = X^3 - 2$ und $K := \mathbb{Q}[X]/(f)$. Der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ von K ist erzeugt von $a := \sqrt[3]{2}$, eine Ganzheitsbasis ist gegeben durch $\{1, a, a^2\}$.

1. Bestimmen Sie für $p = 7$, $p = 11$ und für $p = 31$ jeweils eine Faktorisierung von f modulo p in irreduzible Faktoren.

2. Bestimmen Sie jeweils die Primidealfaktorisierung des Ideals (p) in $\mathcal{O}_K$.

3. Für jede der von Ihnen angegebenen Faktorisierungen $(p) = \Pi \mathfrak{p_i}^{\mu_i}$, berechnen Sie die Grade der Restklassenkörpererweiterungen $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p_i}$ über $\mathbb{Z}/p$.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 5.2: Zeigen Sie: ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist vollständig (d.h. der Rang von Γ ist n) genau dann, wenn Γ kokompakt ist (d.h. $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ein kompakter topologischer Raum ist).
Sie dürfen hierbei verwenden, dass $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ein metrischer topologischer Raum ist, und daher Kompaktheit und Folgenkompaktheit übereinstimmen. Folgenkompaktheit ist die Eigenschaft, dass jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

(3 Punkte)

Aufgabe 5.3: In der Vorlesung wurde für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit d quadratfrei untersucht, wie eine Primzahl p in $\mathcal{O}_K$ in Primideale zerfällt, in Abhängigkeit davon, ob p gerade oder ungerade ist und ob p ein Teiler von d ist oder nicht. Für den Fall $d \equiv 2, 3 \mod (4)$ ergibt sich, wie in der Vorlesung gezeigt wurde:

- Der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ ist als Ring erzeugt von $\sqrt{d}$.
- Ist p gerade, also $p = 2$, so ist $(p) = \mathfrak{p}^2$ (für ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathcal{O}_K$).
- Ist p ungerade und $p \mid d$, so ist ebenfalls $(p) = \mathfrak{p}^2$.
- Ist p ungerade und $p \nmid d$, so hängt die Antwort davon ab, ob d ein Quadratrest modulo p ist:
  - Falls $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$, also d ein Quadratrest modulo p ist, so ist $(p) = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$.
  - Falls $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, also d kein Quadratrest modulo p ist, so ist (p) ein Primideal in $\mathcal{O}_K$.

Ihre Aufgabe ist es, für den Fall $d \equiv 1 \mod (4)$ zu beweisen:

- Der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ ist als Ring erzeugt von $\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ (wurde in der Vorlesung bereits gezeigt).
- Ist p gerade, also $p = 2$, so hängt die Antwort davon ab, welchen Rest d modulo 8 hat:
  - Falls $d \equiv 1 \mod (8)$, so ist $(p) = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$.
  - Falls $d \equiv 5 \mod (8)$, so ist (p) prim in $\mathcal{O}_K$.
- Ist p ungerade und $p \mid d$, so ist ebenfalls $(p) = \mathfrak{p}^2$.
- Ist p ungerade und $p \nmid d$, so hängt die Antwort davon ab, ob d ein Quadratrest modulo p ist:
  - Falls $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$, also d ein Quadratrest modulo p ist, so ist $(p) = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$.
  - Falls $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, also d kein Quadratrest modulo p ist, so ist (p) ein Primideal in $\mathcal{O}_K$.

Hierbei soll jeweils $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_K$ über p sein und für $x, y \in \mathbb{Q}$ schreiben wir

$$\overline{x + y\sqrt{d}} = x - y\sqrt{d}.$$

(6 Punkte)