"Algebraische Zahlentheorie"
SS 2016 — Übungsblatt 9

Ausgabe: 23.06.2016, **Abgabe:** 01.07.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/algzt.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: Wir betrachten die Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),\ K' = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ und das Kompositum $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$, wobei ζ_3 eine primitive dritte Einheitswurzel ist (also $\zeta_3^3 = 1$ und $\zeta_3 \neq 1$, z.B. $\zeta_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$).

1. Zeigen Sie, dass $\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}(\zeta_3)$ und $\zeta_3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.
2. Bestimmen Sie, welche der Körper K, K', L normale Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ sind (mit Beweis) und bestimmen Sie jeweils die normale Hülle (d.h. den kleinsten Oberkörper, der normal über $\mathbb{Q}$ ist). Tipp: Geben Sie Minimalpolynome an, beweisen Sie Irreduzibilität und studieren Sie, welche der Nullstellen in welchen Körpern enthalten sind.
3. Bestimmen Sie, welche der angegebenen Körper (sowie ihre normalen Hüllen und $\mathbb{Q}$ selbst) ineinander enthalten sind und bestimmen Sie die Grade aller so gefundenen Körpererweiterungen.
4. Zeichnen Sie ein Schaubild in $\mathbb{C}$, in dem diese Zahlen eingezeichnet sind: $\left\{1,\ \zeta_3,\ \overline{\zeta_3},\quad \sqrt[3]{2},\ \zeta_3\sqrt[3]{2},\ \zeta_3^2\sqrt[3]{2},\quad \sqrt[3]{2}+\zeta_3,\ \zeta_3\sqrt[3]{2}+\zeta_3^2,\ \zeta_3^2\sqrt[3]{2}+1\right\}$.
5. Geben Sie für $K'/\mathbb{Q},\ L/K',\ L/\mathbb{Q}$ jeweils die Galoisgruppe an, indem Sie für jedes Element beschreiben, wie es operiert (nutzen Sie Ihr Schaubild). Tipp: Jede Permutation einer dreielementigen Menge lässt sich schreiben als Produkt einer zyklischen Permutation mit einer Transposition.
6. Faktorisieren Sie die Primzahlen 2 und 5 in Primideale in den Erweiterungen $K'/\mathbb{Q},\ K/\mathbb{Q},\ L/\mathbb{Q}$ (in dieser Reihenfolge).
7. Bestimmen Sie Zerlegungsgruppe, Trägheitsgruppe, Zerlegungskörper und Trägheitskörper jeweils zu jedem Primideal, welches über 2 oder 5 liegt, für jede Körpererweiterung aus dieser Aufgabe.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 9.2: Klassifizieren Sie alle Primideale in den Körpererweiterungen der vorigen Aufgabe und berechnen Sie jeweils Zerlegungsgruppe, Trägheitsgruppe, Zerlegungskörper und Trägheitskörper.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.3: Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{Q}(\zeta_8)$ für ζ_8 eine primitive achte Einheitswurzel. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von $K/\mathbb{Q}$, geben Sie jeweils den Grad der Körpererweiterung an. Bestimmen Sie, wie sich 2 und 5 in diesen Zwischenkörpern (sowie K selbst) zerlegt und bestimmen Sie für Primideale $\mathcal{P}$ über 2 bzw. $\mathcal{Q}$ über 5 (mit $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathcal{O}_K$) Zerlegungsgruppen und Trägheitsgruppen.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.4: Sei L/K eine Galois-Erweiterung von Zahlkörpern und $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ ein Ideal und $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}_L$ ein unverzweigtes Ideal über $\mathfrak{p}$ (also $\mathfrak{p} = \mathcal{P} \cap K$ unverzweigt in L). Sei $q := [\kappa(\mathcal{P}) : \kappa(\mathfrak{p})]$ der Grad der Restklassenkörpererweiterung ($\kappa(\mathcal{P}) = \mathcal{O}_L/\mathcal{P}$). Zeigen Sie: es gibt genau einen Automorphismus $\phi_{\mathcal{P}} \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit

$$\forall a \in \mathcal{O}_L : \phi_{\mathcal{P}}(a) \equiv a^q \mod \mathcal{P}.$$

Dieser Automorphismus heißt *Frobenius*. Zeigen Sie, dass die Zerlegungsgruppe $G_{\mathcal{P}}$ zyklisch ist, und $\phi_{\mathcal{P}}$ ein Erzeuger ist.

(2 Punkte)

Bonus-Aufgabe 9.5: Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge M operiert und für $m \in M$ bezeichnen wir mit G_m die Untergruppe von G, welche m fest hält. Zeigen Sie: Wenn G transitiv auf M operiert, so gilt für alle $m \in M$, dass G/G_m in Bijektion zu M steht. Es gilt weiterhin im Falle einer transitiven Operation, dass für je zwei Elemente $m, n \in M$ die Untergruppen G_m und G_n in G zueinander konjugiert sind. Erläutern Sie, was man über M sagen kann, wenn G nicht transitiv operiert. Tipp: Betrachten Sie die Abildungen $\phi_m \colon G \to M,\ g \mapsto gm$.

(2 Punkte)