"Algebraische Zahlentheorie"
SS 2016 — Übungsblatt 11

Ausgabe: 07.07.2016, **Abgabe:** 15.07.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/algzt.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 11.1: Zeigen Sie explizit, dass $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ nullteilerfrei ist.

(2 Punkte)

Bonus-Aufgabe 11.2: Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Z}_7$ eine Lösung hat. Lösen Sie dazu induktiv in $\mathbb{Z}/7^{n+1}\mathbb{Z}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 11.3: Berechnen Sie die 3-adische Darstellung von $\sqrt{7}$ sowie die 5-adische Darstellung von $\sqrt{-1}$, jeweils auf 3 Summanden genau.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.4: Die Cantormenge ist diejenige Teilmenge $C \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$, welche übrigbleibt, wenn wir sukzessive aus $[0,1]$ die offenen Teilintervalle löschen:

1. Das Intervall $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,
2. Die Intervalle $\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)$ und $\left(\frac{2\cdot 3+1}{3^2}, \frac{2\cdot 3+2}{3^2}\right)$,

   und so weiter...

Wir können die Cantormenge auch definieren als die Menge aller reellen Zahlen $0 \leq x \leq 1$, deren 3-adische Entwicklung die Ziffer 1 nicht enthält.
Konstruieren Sie eine natürliche Bijektion $\phi\colon \mathbb{Z}_2 \to C$ von den 2-adischen ganzen Zahlen auf die Cantormenge. Zeigen Sie, dass ϕ und auch die inverse Abbildung $\phi^{-1}\colon C \to \mathbb{Z}_2$ stetig sind (also ϕ ein Homöomorphismus ist). Fertigen Sie eine Zeichnung an und tragen Sie die Bilder der ganzen Zahlen $0, \ldots, 15$ ein. Wo liegen $\phi(-1)$ und $\phi(\frac{1}{3})$?

(4 Punkte)

Aufgabe 11.5: Zeigen Sie, dass es keine Primzahl p gibt, sodass die Folge $a_n := 10^{-n}$ in $\mathbb{Q}_p$ konvergiert. Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung $p = 2, 5$ bzw. $p \neq 2, 5$.

(2 Punkte)

Bonus-Aufgabe 11.6: Beweisen Sie, dass für Primzahlen p, q die Körper $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_q$ genau dann isomorph sind, wenn $p = q$ ist.

(2 Punkte)