Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie"
SS16 Blatt 11

Ausgabe: 4.7.2016, **Abgabe:** 11.7.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 11.1: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Sei $R > 0$ eine reelle Zahl und wir wollen annehmen, dass die auf den Kreisrand $\partial B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ eingeschränkte Folge $(f_n|_{\partial B_R(0)})$ gleichmäßig konvergiert. Zeigen Sie, dass dann (f_n) sogar auf ganz $\overline{B_R(0)}$ gleichmäßig konvergiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.2: Sei G ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to A$, wobei A eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie, dass dann die Grenzfunktion $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ entweder konstant ist, oder auch lediglich Werte in A annimmt.

(3 Punkte)

Aufgabe 11.3: Sei G ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen, deren Grenzfunktion $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ nicht konstant null ist. Seien $w \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ fest. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Funktion f besitzt bei w eine Nullstelle von Ordnung m.
2. Es gibt eine offene Umgebung $U \subset G$ von w, sodass in jeder ε-Umgebung $B_\varepsilon(w) \subset U$ die Funktionen f_n für alle bis auf endlich viele n genau m Nullstellen besitzen.

(5 Punkte)

Aufgabe 11.4: Wir definieren

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

für alle komplexen Zahlen s mit $\operatorname{Re} s > 1$. Diese Funktion wurde bereits kurz in der Vorlesung angesprochen.

1. Beweisen Sie, dass für jedes $\delta > 1$ die Reihe bei $\operatorname{Re} s > \delta$ gleichmäßig konvergent ist.

2. Beweisen Sie, dass ζ eine holomorphe Funktion ist.

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 11.5: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, nicht-leer und einfach zusammenhängend. Beweisen Sie, dass es dann einen Homöomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$ gibt.

(4 Punkte)

Die analoge Aussage für $\mathbb{R}^3$ ist übrigens falsch.