Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie"
SS16 Blatt 2

Ausgabe: 2.5.2016, **Abgabe:** 9.5.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Beweisen Sie, dass $f \circ g$ ebenfalls holomorph ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 2.2: Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ Kurven. Wir nennen $\gamma_1(0)$ den *Anfangspunkt* von γ_1, und $\gamma_1(1)$ den *Endpunkt* von γ_1.

1. Gilt $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, d.h. die Kurve γ_1 endet an dem gleichen Punkt, an dem γ_2 anfängt, so definieren wir die *Komposition* der Kurven als
$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass die Komposition wieder eine Kurve ist.

2. Wir definieren die Umkehrung einer Kurve als
$$\gamma_1^{-1}(t) := \gamma_1(1-t).$$
Zeigen Sie, dass dies wieder eine Kurve ist.

3. Sei f eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass
$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$$
sowie
$$\int_{\gamma_1^{-1}} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

4. Sei
$$\gamma : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$$
eine stetig differenzierbare Kurve. Sei $\phi : [a, b] \to [c, d]$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\phi(a) = c$ und $\phi(b) = d$. Zeigen Sie, dass
$$\gamma \circ \phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

ebenfalls eine Kurve definiert. Dies wird als *Umparametrisierung* von γ bezeichnet. Beweisen Sie, dass

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma\circ\phi} f(z)\mathrm{d}z.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2.3: Sei $\gamma(t) := e^{2\pi it}$ für $t \in [0,1]$. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

1. $$\int_\gamma \overline{z}^n \mathrm{d}z \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z},$$

2. $$\int_\gamma \frac{z}{e^z - 1}\mathrm{d}z,$$

3. $$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z}\mathrm{d}z.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2.4: In der Vorlesung haben wir den Cauchyschen Integralsatz kennengelernt (Theorem 2.8 im Skript). Dort wird gefordert, dass $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion sei. Es ist daher sehr natürlich zu fragen, ob der Satz womöglich auch für allgemeinere Funktionen gilt.

1. Konstruieren Sie eine Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ von der offenen Einheitskreisscheibe nach $\mathbb{C}$, die beliebig oft stetig differenzierbar ist, und für die

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \neq 0$$

gilt, wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{2\pi it}$ für irgendein $r \in (0,1)$. Mit anderen Worten: Eine solche Verallgemeinerung existiert nicht.

2. Gehen Sie schrittweise durch den Beweis des Cauchyschen Integralsatzes und geben Sie eine ausführliche schriftliche Erklärung, in welchem Beweisschritt die Holomorphie von f entscheidend eingeht. Diskutieren Sie dabei auch, was genau fehlschlägt, wenn Sie Ihr Beispiel aus Aufgabenteil (1) betrachten.

(4 Punkte)