# Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie" SS16 Blatt 4

**Ausgabe:** 16.5.2016, **Abgabe:** 23.5.2015

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

*Wichtige Information:* Auf diesem Übungsblatt gibt es lediglich Bonusaufgaben. Die Abgabe dieses Blatts ist freiwillig, aber man kann Punkte für die Gesamtpunktzahl sammeln.

**Bonus-Aufgabe 4.1:** Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein und geben Sie nur eine knappe Begründung, z.B. ein Gegenbeispiel (ein oder zwei Sätze; kein vollständiges Argument!).

1. Sei $U$ eine offene Teilmenge der komplexen Zahlen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Besitzt $f$ dann immer eine Stammfunktion?

2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $U$ eine offene Teilmenge. Ist dann $f(U)$ immer auch offen?

3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $A$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ist dann $f(A)$ immer auch abgeschlossen?

4. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, deren einzige Nullstelle bei $z = 0$ liegt und die Vielfachheit $n$ besitzt. Folgt dann, dass

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^n} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

   eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion definiert?

5. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion und $U \subset \mathbb{C}$ eine dichte Teilmenge, auf der $f$ komplex differenzierbar ist. Ist dann $f$ bereits auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph?

6. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion, die sowohl auf reellen wie imaginären Zahlen beschränkt ist, d.h. es gibt eine Zahl $B$ mit

$$|f(z)| < B \qquad \text{für alle} \qquad z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}.$$

   Folgt dann, dass $f$ schon auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist?

7. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen, $f$ eine stetige Funktion, und es gelte
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n' = f$$
(im Sinne gleichmäßiger Konvergenz). Folgt dann, dass die Folge $(f_n)_n$ konvergiert?

8. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen, $f$ eine beliebige komplexwertige Funktion, und es gelte
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n = f$$
(im Sinne gleichmäßiger Konvergenz). Folgt dann, dass die Folge $(f_n')_n$ konvergiert?

9. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die bis auf einen Ausnahmepunkt komplex differenzierbar ist. Folgt dann, dass
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0,$$
wobei $\gamma(t) := 2e^{2\pi it}$ für $t \in [0,1]$?

10. Hat man eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten gegeben, ist dann ihr Konvergenzradius im Sinne der Analysis I (d.h. reell) immer der gleiche Konvergenzradius wie im Komplexen?

(10 Punkte)

**Bonus-Aufgabe 4.2:** Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch
$$f(x+iy) := x^3y^2 + ix^2y^3.$$

1. In welchen Punkten $z := x + iy$ ist diese Funktion komplex differenzierbar?
2. In welchen Punkten ist diese Funktion holomorph?

(2 Punkte)

**Bonus-Aufgabe 4.3:** Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die die Gleichungen
$$f(z+1) = f(z) \qquad \text{sowie} \qquad f(z+i) = f(z)$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt. Beweisen Sie, dass es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $f(z) = \lambda$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(4 Punkte)