Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie"
SS16 Blatt 5

Ausgabe: 23.5.2016, **Abgabe:** 30.5.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Berechnen Sie die Laurent-Entwicklung:

1. für die Funktion $\frac{\sin(z)}{z^3}$ bei $z = 0$;
2. für die Funktion $\frac{z^2}{1-z}$ bei $z = 1$.

(2 Punkte)

Aufgabe 5.2: Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils an, ob $z = 0$ eine isolierte Singularität ist, und falls ja, welchen Typ sie besitzt, z.B. wesentliche Singularität oder Polstelle n-ter Ordnung.

1. $$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \frac{\sin(z)}{z^3}(1 + e^z)$$
2. $$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \frac{1}{z}(e^z - 1)$$
3. $$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \sin\left(\frac{1-z}{z}\right)$$
4. $$\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 5.3: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion. Wir sagen, dass f eine *isolierte Singularität im Unendlichen* besitzt, falls es eine offene Kreisscheibe $U \subset \mathbb{C}$ gibt, sodass $f\mid_{\mathbb{C}\setminus U} \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Gilt dies, so definieren wir eine neue meromorphe Funktion

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Falls g um $z = 0$ eine Singularität eines gewissen Typs besitzt, so nennen wir diese die *Singularität von f im Unendlichen* (z.B. eine Polstelle im Unendlichen).

1. Zeigen Sie, dass g wohldefiniert ist, d.h. g ist in der Tat eine meromorphe Funktion.
2. Zeigen Sie, dass g bei $z = 0$ eine isolierte Singularität besitzt.
3. Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion $z \mapsto e^z$ eine wesentliche Singularität im Unendlichen besitzt.
4. Sei f ein Polynom der Ordnung $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass f eine Polstelle von Ordnung n im Unendlichen hat. Geben Sie die Laurent-Entwicklung dieser Polstelle an.
5. Beweisen Sie: Ist f eine ganze Funktion, die im Unendlichen eine hebbare Singularität besitzt, so ist f notwendigerweise eine konstante Funktion.

(5 Punkte)

Aufgabe 5.4: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, die im Unendlichen eine hebbare Singularität oder Polstelle besitzt.
Wir wollen beweisen, dass f dann sogar eine rationale Funktion ist, d.h. von der Form

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei P und Q Polynome sind. Wir folgen den folgenden Schritten: Falls f konstant null ist, ist die Aussage trivial, d.h. wir können fortan annehmen, dass f nicht konstant null ist.

1. Beweisen Sie, dass f nur endlich viele Polstellen besitzt.
2. Zeigen Sie: Ist $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die im Unendlichen eine hebbare Singularität oder Polstelle besitzt, so ist h notwendigerweise ein Polynom.
3. Folgern Sie, dass f eine rationale Funktion ist.
4. Zeigen Sie: Zwei meromorphe Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die
   (a) bei Unendlich eine hebbare Singularität oder ein Polstelle besitzen, und
   (b) die auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die gleichen Nullstellen mit gleichen Vielfachheiten, sowie die gleichen Polstellen mit gleichen Vielfachheiten, besitzen,

   müssen eine Gleichung der Form

   $$f = \lambda g$$

   mit $\lambda \in \mathbb{C}$ erfüllen. (Tipp: Für diese Beobachtung spielt es eine große Rolle, dass wir die Annahme für alle Null- und Polstellen auch bei Unendlich stellen! Kennen Sie ein Gegenbeispiel falls wir diese Annahme fallenlassen?)

(6 Punkte)