Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie"
SS16 Blatt 7

Ausgabe: 6.6.2016, **Abgabe:** 13.6.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Zeigen Sie, wie man aus dem Satz über die Blätterzahl (Skript, Korollar 5.17) den Satz über Gebietstreue folgern kann.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to V := f(U)$ eine holomorphe Funktion mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Sei $\gamma : [0,1] \to V$ ein Weg und g eine in einer Umgebung von $\gamma(0)$ definierte Umkehrfunktion von f. Zeigen Sie, dass g eine analytische Fortsetzung entlang von γ besitzt.

(5 Punkte)

Aufgabe 7.3: Wir wissen bereits, dass der Realteil einer holomorphen Funktion harmonisch[1] ist. Wir wollen eine Art Umkehrung beweisen:

1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion der Form $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit u und v reell-wertigen Funktionen. Zeigen Sie, dass dann
$$f' = u_x - iu_y$$
gilt.

2. Sei nun $u : U \to \mathbb{R}$ eine beliebige harmonische Funktion und U einfach zusammenhängend. Beweisen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $\mathrm{Re}(f) = u$.

(5 Punkte)

3. *(Bonus-Aufgabe)* Geben Sie ein Beispiel für ein nichtleeres Gebiet in $\mathbb{C}$ mitsamt einer harmonischen Funktion $u : U \to \mathbb{R}$, sodass es keine solche holomorphe Funktion f geben kann.

(1 Punkte)

---

[1] siehe Skript, Definition 1.6

Aufgabe 7.4: Wir wollen uns mit der Umlaufzahl beschäftigen.

1. Wir definieren Kurven $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

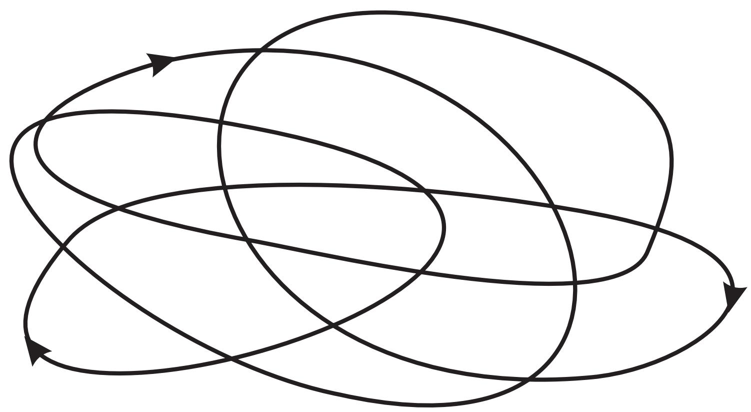
$$\gamma_a(t) := e^{2\pi i t} \qquad \gamma_b(t) := -5e^{8\pi i t} \qquad \gamma_c(t) := 2 - e^{2\pi i t}$$

   Berechnen Sie die Umlaufzahl der Kette

$$\gamma_a - 2\gamma_b + 3\gamma_c$$

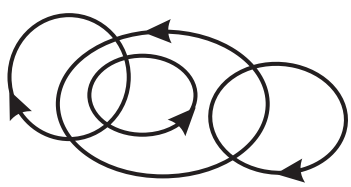
   um den Nullpunkt $z := 0$, sowie um $z := 2$.

2. In der Skizze



   könnten wir an allen Punkten z, die nicht auf der abgebildeten Kurve γ liegen, die Umlaufzahl von γ um z bestimmen. Notieren Sie in den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ welche Zahlen sich für dort liegende Punkte ergeben würden. (Bei dieser Teilaufgabe geht es lediglich um die Intuition. Sie müssen keinen Beweis oder irgendwelche Rechnungen anfertigen).

3. Führen Sie dies analog für die folgende Skizze durch, die als Kette $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ der vier abgebildeten Wege zu verstehen ist:



   Handelt es sich bei der abgebildeten Kette um einen Zyklus?

(5 Punkte)

4. *(Bonus-Aufgabe)* Geben Sie in der Menge $U := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ein Beispiel für zwei Zyklen an, die nicht homolog sind.

(1 Punkte)