

## Steilkurs Schemata SS 17

Woche vom 1. Mai

1. Sei  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann sind  $\text{Hom}_R(M, \cdot)$  und  $\text{Hom}_R(\cdot, M)$  linksexakt.
2. Sei  $R$  kommutativer Ring mit 1 und  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann ist  $\cdot \otimes_R M$  linksadjungiert zu  $\text{Hom}_R(M, \cdot)$ .
3. Welche der folgenden Kategorien sind abelsch? Die Kategorie der abelschen Gruppen, die Kategorie der unitären kommutativen Ringe, die Kategorie der topologischen Räume, die Kategorie der Gruppen.
4. (Yoneda Einbettung) Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $X$  ein Objekt. Sei der kontravariante Funktor

$$F_X : \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$$

definiert durch  $Y \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ .

- (a) Für jeden Morphismus  $X \rightarrow X'$  erhalten wir eine Transformation von Funktoren  $F_X \rightarrow F_{X'}$ . Zeigen Sie, dass diese Zuordnung eine Bijektion zwischen Morphismen und Transformationen von Funktoren definiert.
  - (b) Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass  $F_X$  das Objekt  $X$  bis auf eindeutigen Isomorphismus festlegt.
  - (c) Machen Sie die universelle Eigenschaft explizit.
5. Sei  $\mathcal{C}$  eine kleine Kategorie, d.h. die Objekte bilden eine Menge. Sei  $\text{PSh}_{\mathcal{C}}$  die Kategorie der Prägarben von abelschen Gruppen, d.h. die Kategorie der kontravarianten Funktoren von  $\mathcal{C}$  in die Kategorie von abelschen Gruppen. Zeigen Sie, dass  $\text{PSh}_{\mathcal{C}}$  abelsch ist.
  6. Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie. Dann ist die Yoneda-Einbettung

$$\mathcal{C} \rightarrow \text{PSh}_{\mathcal{C}}$$

exakt und volltreu. Formulieren Sie auch das Kriterium für Exaktheit in  $\mathcal{C}$ , das sich hieraus ergibt.

7. Benutzen Sie das obige, um zu zeigen, dass  $\otimes_R M$  rechtsexakt ist.
8. Sei  $M$  ein Monoid, d.h. eine kommutative Halbgruppe. Die Gruppenkomplettierung  $M^+$  hat als Erzeuger (als abelsche Gruppe) die Elemente von  $M$  mit allen Relationen aus  $M$ . Formulieren Sie eine universelle Eigenschaft.
9. Zeigen Sie: Die Gruppenkomplettierung ist linksadjungiert zur Inklusion der Kategorie der abelschen Gruppen in der Kategorie der kommutativen Halbgruppen.

A. Huber-Klawitter