Mathematisches Institut, Arithmetische Geometrie, Prof. Dr. Annette Huber–Klawitter

Probeklausur: "Kommutative Algebra" SS 2017

Datum und Uhrzeit:	–
Prüfungsdauer:	2 Stunden
Raum:	—
Erlaubte Hilfsmittel:	1 handbeschriebenes DIN A4 Blatt
Prüfer:	Prof. Dr. Annette Huber–Klawitter

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Fach: ....

Studiengang: ☐ Bachelor ☐ Master ☐ Lehramt ☐ sonstiges

Unterschrift: ....

Anmerkungen:

- Füllen Sie dieses Deckblatt vollständig aus.
- Zusätzliche Blätter sind nur einseitig zu beschreiben.
- Zusätzliche Blätter sind mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten.**

Prüfungsunfähigkeit

Durch den Antritt dieser Prüfung erklären Sie sich für prüfungsfähig. Sollten Sie sich während der Prüfung nicht prüfungsfähig fühlen, können Sie aus gesundheitlichen Gründen auch während der Prüfung von dieser zurücktreten. Gemäß der Prüfungsordnungen sind Sie verpflichtet, die für den Rücktritt oder das Versäumnis geltend gemachten Gründe unverzüglich (innerhalb von 3 Tagen) dem Prüfungsamt durch ein Attest mit der Angabe der Symptome schriftlich anzuzeigen und glaubhaft zu machen. Weiter Informationen hierzu können auf den Internetseiten des Prüfungsamtes nachgelesen werden.

Note: ....

Klausur eingesehen am: ....

Unterschrift des Prüfers: ....

Aufgabe 1:
Formulieren Sie den Hilbertschen Basissatz.

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein und geben Sie nur eine knappe Begründung, z.B. ein Gegenbeispiel (ein oder zwei Sätze; kein vollständiges Argument!).
Sei R ein Ring.

1. Ist jedes Primideal auch ein reduziertes Ideal?

2. Ist das von Null erzeugte Ideal $I := \langle 0 \rangle$ stets ein Primideal?

3. Sei X eine affine Varietät. Hat X dann zwangsläufig nur endlich viele Zusammenhangskomponenten?

4. Ist jeder Noethersche Untermodul eines endlich erzeugten Moduls wieder endlich erzeugt?

5. Seien $X \subset Y$ algebraische Mengen, die nicht gleich sind, in $\mathbb{A}^3$. Gilt dann zwangsläufig $\dim X \neq \dim Y$?

6. Ist die Hilbert-Funktion ϕ stets ein Polynom?

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Dimension und die Anzahl der irreduziblen Komponenten:

1. $V_1 := V(X_1 + X_2, X_2X_3)$ in $\mathbb{A}^3$,
2. $V_2 := V(X_1^3 + 3X_1^2X_2 + 3X_1X_2^2 + X_2^3)$ in $\mathbb{A}^3$,
3. $V_3 := V(X_1 + 2X_2, X_1 + 5X_2 + \frac{1}{2}X_3, X_4 + 3X_5, X_6^3\,)$ in $\mathbb{A}^6$,
4. V_4, welches als das offene Komplement von $V(X_1 + X_2)$ in $\mathbb{A}^2$ definiert ist.

Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

Aufgabe 3:
Sei $c \in \mathbb{C}$ fest. Wir betrachten die Punkte der Form

$$S_c := \{x^2 + y^2 = c^2 \mid x, y \in \mathbb{C}\}$$

in $\mathbb{A}^2$.

1. Zeigen Sie, dass S_c eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^2$ ist. Geben Sie $I(S_c)$ an.
2. Bestimmen Sie die Dimension von S_c in Abhängigkeit von c.
3. Bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten von S_c in Abhängigkeit von c.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper.

1. Beweisen Sie, dass die Ideale $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$ in $K[X_1, \ldots, X_n]$ maximal sind.

2. Beweisen Sie, dass falls alle maximalen Ideale von $K[X_1, \ldots, X_n]$ die Form $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$ besitzen, der Körper K algebraisch abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 5:
Sei R ein Ring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal. Es gelte weiter, dass für alle $x \in \mathfrak{m}$ das Element $1+x$ eine multiplikative Inverse besitze (d.h. eine Einheit ist). Beweisen Sie, dass R dann ein lokaler Ring ist.