# Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra"
# SS17  Blatt 10

**Ausgabe:** 3.7.2017, **Abgabe:** 10.7.2017

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss17/kommalg/kommalg17.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

**Aufgabe 10.1:** Sei $K$ ein Körper und $A$ eine nullteilerfreie endliche erzeugte $K$-Algebra, $f \in A$ ungleich null. Beweisen Sie mittels unserer Sätze über Dimension, dass

$$\dim A = \dim A_f.$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 10.2:** Sei $K$ ein *unendlicher* Körper. Geben Sie einen neuen Beweis für das Noethersche Normalisierungslemma (Theorem 6.11 im Skript), wobei Sie statt

$$z_i := y_i - y_1^{r_i}$$

für $r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{N}$ einen Variablenwechsel der Form

$$z_i := y_i - a_i y_1$$

für $a_2, \ldots, a_m \in K$ nutzen.

Hinweis: Dies entspricht der Originalidee von E. Noether. Sie benutzt wesentlich die Eigenschaft, dass $K$ unendlich viele Elemente besitzt.

(5 Punkte)

**Aufgabe 10.3:**

1. Sei $K$ ein Körper und $A$ eine reduzierte $K$-Algebra (d.h. es gibt keine nilpotenten Elemente abgesehen von null) mit Dimension

   $$\dim_K A < \infty$$

   als Vektorraum. Zeigen Sie, dass $A$ isomorph zu einem endlichen Produkt von Körpern ist.

2. Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein endlicher Morphismus von affinen Varietäten und $y \in Y$. Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(y)$ eine endliche Menge ist.

(Tipp: Chinesischer Restesatz, in einer Variante mit mehreren Idealen, siehe Aufgabe 2.2)

(6 Punkte)

**Aufgabe 10.4:** Sei $A$ ein beliebiger Ring. Wir wollen beweisen, dass

$$1 + \dim A \leq \dim A[X] \leq 1 + 2 \dim A.$$

(Ausblick: Für noethersche Ringe gilt die viel stärkere Aussage $\dim A[X] = 1 + \dim A$)
Wir gehen wie folgt vor:

1. Beweisen Sie die Abschätzung nach unten, indem Sie aus einer aufsteigenden Primidealkette in $A$ eine um eins längere in $A[X]$ konstruieren.

2. Sei $P$ ein Primideal in $A$ und $Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_r$ eine Kette von Primidealen in $A[X]$ mit $Q_i \cap A = P$ für alle $i$. Zeigen Sie, dass dies eine aufsteigende Kette von Primidealen in erstens $(A/P)[X]$ definiert, und zweitens auch $(A/P)_P[X]$.

3. Zeigen Sie, dass $(A/P)_P$ ein Körper ist, und folgern Sie, dass $r = 0$ oder $r = 1$.

4. Folgern Sie, dass $\dim A[X] \leq 1 + 2 \dim A$ gilt.

(6 Punkte)