Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra"
SS17 Blatt 2

Ausgabe: 2.5.2017, **Abgabe:** 8.5.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss17/kommalg/kommalg17.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Sei $f : R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen.

1. Zeigen Sie: Ist I ein Ideal in S, so ist $f^{-1}(I)$ ein Ideal in R.
2. Ist J ein Ideal in R, ist dann $f(J)$ immer ein Ideal in S? Geben Sie ein Gegenbeispiel oder einen Beweis.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.2: *(Chinesischer Restesatz)* Sei R ein Ring und I, J Ideale. Wir definieren eine Teilmenge

$$I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\} \subseteq R,$$

die *Idealsumme* heißt. Die Ideale I, J heißen *teilerfremd* falls $I + J = R$.

1. Zeigen Sie, dass $I + J$ ein Ideal ist.
2. Zeigen Sie, dass $I \cap J$ ein Ideal ist.
3. Seien I_1 und I_2 teilerfremde Ideale. Wir definieren

$$\begin{aligned} f : R/(I_1 \cap I_2) &\longrightarrow R/I_1 \times R/I_2, \\ r &\longmapsto (q_1(r), q_2(r)), \end{aligned}$$

   wobei $q_i : R \to R/I_i$ die natürliche Quotientenabbildung ist. Zeigen Sie, dass f ein wohldefinierter Ringhomomorphismus ist.
4. Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus von Ringen ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.3: Wir definieren eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ durch

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r = \sin(2\varphi)\},$$

wobei die Gleichung in Polarkoordinaten (r, φ) gegeben ist, $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$.

1. Fertigen Sie eine Skizze von X an (Tipp: Es bringt Glück).
2. Wir definieren

   $$V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0\}.$$

   Zeigen Sie, dass $X \subseteq V$.
3. Zeigen Sie, dass sogar $X = V$.

Sie dürfen trigonometrische Identitäten ohne Beweis (z.B. aus Tabellen) verwenden, geben Sie aber stets präzise an, welche Identität Sie nutzen.

(Tipp: $\sin(2\varphi)^2 = 4\sin(\varphi)^2\cos(\varphi)^2$ und $x^2 + y^2 = r^2$)

(6 Punkte)