Seminar zur Galoiskohomologie

Lehrende:

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter: `annette punkt huber at math.uni-freiburg.de`
M. Sc. René Recktenwald: `rene punkt recktenwald at math.uni-freiburg.de`

Termin: Mittwoch 10:15-11:45
13 Termine. Es entfällt der 23.05 wegen der Pfingstpause.

Ablauf:

1. Alle Vortragenden sollen *spätestens eine Woche* vor ihrem Vortragstermin zu einer Vorbesprechung kommen, zu der der Vortrag bereits ausgearbeitet sein soll. Melden Sie sich in der Vorbereitungszeit bei Unklarheiten frühzeitig. Das gilt sowohl für inhaltliche Fragen, als auch für Fragen zur Auswahl des Inhalts.

2. Die Vorträge sollen ca. 80 Minuten lang sein. Beachten Sie, dass Zwischenfragen der Zuhörer erwünscht und zu erwarten sind. Die reine Redezeit ist entsprechend reduziert.

3. Die angegebenen Quellen dienen zur allgemeinen Orientierung. Sie sind ermutigt sich selbstständig weitere Quellen zu suchen. Schauen sie insbesondere auch in die Quellen anderer Vorträge.

Worum es geht:

Themen

1. **Hilbert 90**: [Bos01, 4.8],
Definieren Sie $H^1(G, K^*)$ durch Erzeuger und Relationen. Beweisen Sie die multiplikative Form von Hilbert 90. Satz über zyklische Erweiterungen in Charakteristik teilerfremd zu n. Klassifizieren Sie alle Pythagoreischen Tripel.

2. **Artin-Schreier**: [Bos01, 4.8]
Wiederholung von Grundbegriffen zu endlichen Körpern. Beweisen Sie die additive Form von Hilbert 90. Satz über zyklische Erweiterungen von Grad p. Zeigen Sie: Ist $[\overline{K} : K] = p$, so ist $\mathrm{Char}\, K \neq p$.

3. **Homologische Algebra I**: [Bro82, Chapter I], [Ser97, Chapter VII] Führen Sie die Begriffe Kettenkomplex, Exaktheit, Kohomologie, Funktorialität ein. Erklären Sie wie man die lange exakte Kohomologiesequenz erhält. Geben Sie reichlich Beispiele.

4. **Gruppenkohomologie**: [Bro82, Chapter III], [Ser97, Chapter VII]
Führen Sie G-Moduln und Gruppenringe. Definieren Sie Gruppenkohomologie durch das explizite Angeben eines berechnenden Komplexes. Demonstrieren Sie, dass $H^0(G; M) = M^G$ gilt und beschreiben Sie $H^1(G; M)$ als verschränkte Morphismen. Erklären Sie die lange exakte Kohomologiesequenz für Gruppenkohomologie.

5. **Klassifikation von Ausdehnungen**: [Bro82, Chapter IV]
   Zeigen Sie ausführlich wie $H^2(G; M)$ im wesentlichen alle exakten Sequenzen $0 \to M \to E \to G \to 1$ klassifiziert.

6. **Galoiskohomologie**: [Ser97, Chapter X]
   Definieren Sie Galoiskohomologie. Beweisen Sie, dass $H^i(G; K) = 0$ für alle $i \geq 1$ gilt. Stellen Sie insbesondere auch einen Zusammenhang zum ersten Vortrag her.

7. **Galoisdescent**: [Bos01, 4.11], [Ser97, Chapter X], [Ber10]
   Konjugations-Problem, d.h erklären Sie folgende Beobachtung für allgemeine Galoiserweiterungen: Reele Matrizen die konjugiert in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sind, sind es auch in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Für SL_n ist das nicht mehr der Fall.

8. **Unendliche Galoistheorie und pro-endliche Gruppen**: [Neu, Chapter I], [Bos01, 4.2]
   Definieren Sie die Galoisgruppe einer unendlichen Körpererweiterung. Definieren Sie, was eine pro-endliche Gruppe ist. Formulieren Sie den Hauptsatz der Galoistheorie für unendliche Erweiterungen.

9. **Kummer Theorie I**: [Bos01, 4.9], [Lan, VI.8]
   Zyklische Erweiterungen, Kummer-Paarung

10. **Kummer Theorie II**: [Bos01, 4.9], [Lan, VI.8]
    Hauptsatz der Kummertheorie

11. **Artin-Schreier**: [Bos01, 4.10]
    Erklären Sie, wie man zu [Bos01, 4.9 Theorem 1] kommt (ohne vollständigen Beweis) und erläutern sie die Ideen am Beispiel Char $K = p$ und $n = p$. Geben Sie die Existenzaussage aus Theorem 8 ohne Witt-Vektoren zu erklären.

12. **Brauer-Gruppe I**: [KKS10, 8.2], [Ser97, Chapter X], [Neu, Chapter VI], [GS06]
    Definieren Sie zentral einfache Algebren. Erklären Sie außerdem wie sie konstruiert werden können. Erläutern Sie das am Beispiel der Quarternionen. Formulieren Sie die Äquivalenz zwischen zentral einfachen Algebren und Schiefkörpern. Definieren Sie die Brauer-Gruppe

13. **Brauer-Gruppe II**: [KKS10, 8.2], [Ser97, Chapter X], [Neu, Chapter VI], [GS06]
    Definieren Sie die kohomologische Brauer-Gruppe und zeigen Sie, dass sie mit der Brauer-Gruppe aus dem vorherigem Vortrag übereinstimmt.

14. **Homologische Algebra II**: [Wei95]
    Abelsche Kategorien, Quasi-Isomorphismen, injektive und projektive Modulen, Auflösungen

15. **Derivierte Funktoren**: [Wei95]
    Delta-Funktoren, Existenz von derivierten Funktoren

References

[Ber10] *An Introduction to Galois Cohomology and its Applications.* Number 377 in London Mathematical Society Lecture Note series. Cambridge University Press, 2010.

[Bos01] Siegfried Bosch. *Algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 4 edition, 2001.

[Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of Groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer - New York, 1982.

[GS06] Philippe Gille and Tamás Szamuely. *Central Simple Algebras and Galois Cohomology.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2006.

[KKS10] Kazuya Kato, Nobushlge Kurokawa, and Takeshi Saito. *Number Theory 2.* Number 240 in Translations of Mathematical Monographs. 2010.

[Lan] Serge Lang. *Algebra.* Number 211 in Graduate Texts in Mathematics.

[Neu] Neukirch. *Cohomology of Number Fields.*

[Ser97] Jean-Pierre Serre. *Local Fields*, volume 67 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer - New York, 1997.

[Wei95] C.A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.