"Lineare Algebra II"
SS 2019 — Übungsblatt 6

Ausgabe: 04.06.2019, **Abgabe:** 18.06.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss19/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 6.1: Sei k algebraisch abgeschlossen. Sei $M \in \mathrm{M}_3(k)$ eine Matrix. Bestimmen Sie welche mögliche Formen die Jordansche Normalform von M haben kann, und geben Sie für jede Form die Eigenwerte und deren algebraische und geometrische Multiplizitäten an. **(4P)**

Aufgabe 6.2: Sei V ein k-Vektorraum, λ, μ zwei verschiedene Elemente von k. Sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus mit Minimalpolynom $(X - \lambda)(X - \mu)$. Führen Sie einen direkten Beweis (ohne Jordansche Normalform) für die Diagonalisierbarkeit von f. Gehen Sie mit folgenden Schritten vor:

1. Es gilt $\mathrm{Bild}(f - \lambda \mathrm{id}) \subset V_\mu$ und $\mathrm{Bild}(f - \mu \mathrm{id}) \subset V_\lambda$.
2. Es gibt $a, b \in k$, so dass
$$1 = a(X - \lambda) + b(X - \mu).$$
3. Für jedes $v \in V$ gibt es eine Zerlegung $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in \mathrm{Bild}(f - \lambda \mathrm{id})$ und $v_2 \in \mathrm{Bild}(f - \mu \mathrm{id})$.
4. Es gilt $V \cong V_\lambda \oplus V_\mu$. **(6P)**

Aufgabe 6.3: Es seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus, der sich zu Endomorphismen $f_i \colon U_i \to U_i$, $i = 1, 2$, einschränkt. Zeigen Sie:

1. Gilt $V = U_1 + U_2$, so folgt $\mu_f = \mathrm{kgV}(\mu_{f_1}, \mu_{f_2})$ für die Minimalpolynome von f, f_1, f_2.
2. f schränkt sich zu einem Endomorphismus $f_{12} \colon U_1 \cap U_2 \to U_1 \cap U_2$ ein, und es gilt $\mu_{f_{12}} | \mathrm{ggT}(\mu_{f_1}, \mu_{f_2})$ für die Minimalpolynome von f, f_1, f_2. Gilt im Allgemeinen auch die Gleichheit $\mu_{f_{12}} = \mathrm{ggT}(\mu_{f_1}, \mu_{f_2})$? **(6P)**

(bitte wenden)

Bonus-Aufgabe 6.4: Die Folge der Fibonacci-Zahlen $c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{N}$ ist definiert durch $c_1 = c_2 = 1$ und $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

1. Berechnen Sie c_i für $i \in \{1, \ldots, 7\}$.
2. Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit

$$A \cdot \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+2} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

   für $n \geq 1$.
3. Finden Sie eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, derart dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ Diagonalgestalt besitzt.
4. Benutzen Sie diese Information, um einen geschlossenen Ausdruck für c_n zu finden, der nur von n abhängt. **(8P)**