

“Lineare Algebra II”
SS 2019 — Übungsblatt 7
Ausgabe: 18.06.2019, Abgabe: 25.06.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss19/la.html>

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Berechnen Sie die Jordansche Normalform von

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}). \quad (4P)$$

Aufgabe 7.2: Sei $M \in M_5(\mathbb{R})$ die folgende Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1. Überprüfen Sie, dass M nilpotent ist.
2. Geben Sie eine Zerlegung in zyklische Teilräume und bestimmen Sie zugehörige Hauptvektoren. (6P)

Aufgabe 7.3: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus, $U \subset V$ ein f -invarianter Untervektorraum. Sei v_1, \dots, v_k eine Basis von U und ergänze diese Basis zu einer Basis $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ von V . (Bemerkung: Die Vektoren v_{k+1}, \dots, v_n induzieren eine Basis $\bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_n$ des Quotientenvektorraums V/U .)

Sei A die darstellende Matrix von $f|_U$ bezüglich v_1, \dots, v_k . Sei B die darstellende Matrix von $\bar{f} : V/U \rightarrow V/U$ bezüglich $\bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_n$.

Zeigen Sie, dass die darstellende Matrix von f bezüglich v_1, \dots, v_n die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}. \quad (4P)$$

(bitte wenden)

Aufgabe 7.4: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus, $U \subset V$ ein f -invariante Untervektorraum. Sei λ ein Eigenwert von f . Mit $H_\lambda(V)$ (bzw. $H_\lambda(W)$) meinen wir den Hauptraum von V (bzw. W) bezüglich des Eigenwertes λ .
Zeigen Sie, dass $H_\lambda(W) \subset H_\lambda(V)$ und $H_\lambda(V/W) \cong H_\lambda(V)/H_\lambda(W)$. **(4P)**

Bonus-Aufgabe 7.5:

1. Geben Sie eine Formulierung des Elementarteilersatzes mit Referenz in einem Lehrbuch (nicht Wikipedia, nicht Vorlesungsskript). **(2P)**
2. Lesen Sie den Zusammenhang zur Jordansche Normalform nach und geben Sie eine kurze Erläuterung (mit Referenz). **(4P)**